

Introducción a la Teoría del Equilibrio General



HB145
B3
e.2

Ronald Balza Guanipa

RAA00014

HB145
B3
e.2

Co 000 200 4100 DAA
APQ 0014 202



Este libro ha sido publicado electrónicamente por
la Red Venezolana de Conocimiento Económico
(REDECONOMÍA) en la página
<http://www.redeconomia.org.ve/p.asp?redeconomia=userdetail&user=rbalza>

Je crois que la question est une question mathématique,
qui ne peut se vider que mathématiquement...

Carta de Walras a Böhm-Bawerk
5 de mayo de 1889

Indice

	Págs.
Introducción	1
I. Conceptos matemáticos básicos: conjuntos	4
Introducción	4
1. Notación de conjuntos y operaciones básicas	4
2. Relaciones binarias	6
<i>a. Relaciones binarias y funciones: definiciones básicas</i>	6
<i>b. Relaciones de equivalencia, preorden y orden, y sus propiedades</i>	8
<i>c. Maximales y minimales en conjuntos preordenados</i>	9
3. Campos y espacios vectoriales	10
4. Espacios producto interior, métricos, normados y topológicos	11
<i>a. Espacios producto interior</i>	12
<i>b. Espacios métricos</i>	12
<i>c. Espacios normados</i>	13
<i>d. Espacios topológicos</i>	14
5. Conjuntos acotados, abiertos y cerrados en R^N	14
6. Sucesiones y subsucesiones	18
<i>a. Definiciones básicas</i>	18
<i>b. Teorema de Bolzano-Weierstrass</i>	20
<i>c. Sucesiones, subsucesiones y conjuntos cerrados</i>	22
7. Conjuntos compactos, secuencialmente compactos, separados y conexos en R^N	23
8. Conjuntos convexos	25
9. Hiperplanos	26
<i>a. Teorema del hiperplano acotador</i>	27
<i>b. Teorema del hiperplano separador</i>	28
10. Resumen	29
II. Conceptos matemáticos básicos: funciones	30
Introducción	30
1. Límite de funciones	30
2. Continuidad de funciones	31
3. Homogeneidad de funciones	32
<i>a. Derivada parcial de ambos lados de la identidad con respecto a t</i>	34
<i>b. Derivada parcial de ambos lados de la identidad con respecto a x_1^1</i>	35
<i>c. Derivadas de las curvas de nivel de una función $z = z(x_1, x_2)$ homogénea de grado r</i>	35
4. Concavidad y cuasiconcavidad de funciones	36
<i>a. Concavidad y convexidad de funciones</i>	37
<i>b. Cuasiconcavidad de funciones</i>	40

5. Funciones con puntos fijos	43
<i>a. Teorema del punto fijo para contracciones</i>	43
<i>b. Teorema del punto fijo de Brouwer</i>	46
b.1. El conjunto simplex: conceptos básicos	46
b.2. Lema de Sperner	47
b.3. Teorema Knaster-Kuratowski-Mazurkeiwicz (KKM)	50
b.4. Teorema del punto fijo de Brouwer	51
6. Puntos fijos, puntos periódicos y caos en sistemas dinámicos discretos	52
<i>a. Sistema dinámico discreto</i>	53
<i>b. Puntos fijos, puntos periódicos y órbitas</i>	53
<i>c. Una órbita 3-periódica implica una órbita n-periódica para todo entero positivo n</i>	54
<i>d. Funciones caóticas en R</i>	57
<i>e. Una órbita 3-periódica implica caos</i>	58
7. Resumen	60
III. Equilibrio general estático con certidumbre	61
Introducción	61
1. Consumidores y empresas en una economía Walrasiana	61
<i>a. El problema del consumidor</i>	61
<i>b. El problema de la empresa</i>	63
2. El equilibrio Walrasiano	64
<i>a. Definición</i>	64
a.1. Equilibrio Walrasiano en una economía con producción	64
a.2. Equilibrio Walrasiano en una economía de intercambio puro	65
a.3. La caja de Edgeworth	65
<i>b. Equilibrio Walrasiano y función de exceso de demanda</i>	66
b.1. Función de exceso de demanda en una economía de intercambio puro	66
b.2. Función de exceso de demanda en una economía con producción	70
<i>c. Economías regulares y teorema del índice</i>	71
c.1. Economías regulares	71
c.2. Teorema del índice	73
c.3. Un ejemplo con dos bienes	74
3. Propiedades del equilibrio en economías regulares	76
<i>a. Existencia del equilibrio Walrasiano</i>	76
<i>b. Unicidad</i>	80
b.1. Axioma débil de la preferencia revelada para la función de exceso de demanda agregada	80
b.2. Sustituibilidad bruta	81
<i>c. Estabilidad</i>	82
c.1. Condiciones de estabilidad Hicksianas: Estabilidad perfecta e imperfecta	83
c.2. <i>Tâtonnement</i>	86
4. Equilibrio Walrasiano y óptimo de Pareto	93
<i>a. Primer teorema del bienestar</i>	93
<i>b. Segundo teorema del bienestar</i>	94

<i>c. Importancia y limitaciones de los teoremas del bienestar</i>	97
5. Resumen	98
IV. Equilibrio general estático con incertidumbre	99
Introducción	99
1. Consumidores y empresas en una economía Arrow-Debreu	100
<i>a. El problema del consumidor</i>	100
<i>b. El problema de la empresa</i>	102
2. El equilibrio Arrow-Debreu	103
3. El equilibrio de Radner en economías de intercambio puro	105
<i>a. El problema del consumidores con activos de Arrow</i>	105
<i>b. Equilibrio de Radner con activos de Arrow</i>	106
<i>c. Equivalencia de los equilibrios Arrow-Debreu y Radner con activos de Arrow</i>	107
<i>d. Extensión: equilibrio de Radner con otros activos</i>	110
<i>e. La condición de no arbitraje</i>	111
4. Información imperfecta y expectativas racionales: equilibrio Green-Lucas	112
5. Resumen	115
V. Equilibrio general dinámico con certidumbre	116
Introducción	116
1. Agentes, mercancías y precios en una economía con tiempo	117
<i>a. Precios y mercancías</i>	117
<i>b. Preferencias</i>	118
<i>c. Tecnología</i>	118
2. Equilibrio Walrasiano y óptimo de Pareto en una economía con un consumidor y horizonte finito	121
<i>a. El problema del consumidor</i>	121
<i>b. El problema de la empresa</i>	121
<i>c. Equilibrio Walrasiano</i>	124
3. Equilibrio Walrasiano y óptimo de Pareto en una economía con un consumidor y horizonte infinito	124
<i>a. El problema del consumidor</i>	125
<i>b. El problema de la empresa</i>	126
<i>c. Equilibrio Walrasiano</i>	127
<i>c.1. Primer teorema del bienestar</i>	128
<i>c.2. Segundo teorema del bienestar</i>	128
4. Propiedades de las trayectorias de equilibrio en una economía con un consumidor y horizonte infinito	130
<i>a. Existencia</i>	130
<i>b. Unicidad</i>	130
<i>c. Computabilidad</i>	131
<i>d. Estados estacionarios y estabilidad</i>	135
5. Equilibrio Walrasiano en una economía con varios consumidor y horizonte infinito	137
6. Resumen	138

VI. Importancia de la teoría del equilibrio general	139
Introducción	139
1. Macroeconomía y teoría del equilibrio general	139
<i>a. Inversión bajo incertidumbre</i>	140
<i>b. Neutralidad del dinero</i>	141
2. Debilidades de la teoría del equilibrio general	142
<i>a. La definición de los agentes</i>	142
<i>b. Los mercados completos</i>	143
<i>c. La competencia perfecta</i>	144
<i>d. Ausencia de instituciones que evolucionen en el tiempo</i>	144
<i>e. ¿Cuál óptimo de Pareto?</i>	145
3. Resumen	145
Bibliografía	146

Introducción

Una de las innovaciones más importantes en el estudio de la economía fue la incorporación de las matemáticas como lenguaje y herramienta de análisis. Cournot (1974) publicó en 1838 un trabajo pionero que, junto con los de otros ingenieros interesados en los problemas económicos, precedió y estimuló el uso del razonamiento matemático que caracteriza las obras publicadas a partir de 1870. La introducción de las matemáticas permitió replantear viejos problemas del período clásico, entre los cuales destaca la existencia de la mano invisible de Adam Smith, en términos de equilibrios y óptimos sociales definidos de un modo preciso. Por esta razón, suele llamarse período neoclásico al comprendido entre 1870 y 1914, y, por extensión, neoclásica a la teoría económica desarrollada a partir de los problemas y métodos matemáticos propuestos entonces. La teoría del equilibrio general, desarrollada durante fines del siglo XIX y buena parte del XX, suele considerarse el más acabado resultado de la escuela neoclásica¹.

Este trabajo tratará sobre la idea del equilibrio general, debida principalmente al trabajo de Léon Walras (1834-1910), introduciendo al lector en el estudio de sus propiedades. El siguiente párrafo, debido a Shumpeter (1975, pág. 178) explica la importancia que Walras y Marshall daban a la definición del equilibrio, y a los problemas de existencia y unicidad asociados con él:

Si las relaciones que se derivan de nuestra exploración del "significado" de un fenómeno son de tal naturaleza que determinan una serie de valores de las variables que no revelarán tendencia a variar *bajo la exclusiva influencia de los hechos comprendidos en aquellas relaciones como tales*, hablamos de equilibrio: vemos que estas relaciones definen las condiciones de equilibrio o una posición de equilibrio del sistema y que *existe* una serie de valores de las variables que *satisface* las condiciones de equilibrio. Tal no es necesariamente el caso, por supuesto: no se dan necesariamente una serie de valores de variables que satisfarán una serie dada de relaciones y pueden existir varias de estas series o una infinidad de ellas. Equilibrios múltiples no son necesariamente inútiles, pero, desde el punto de vista de *toda* ciencia exacta, la existencia de una ("serie de valores") de equilibrio singularmente determinado "es, por supuesto, de importancia primordial, incluso en el caso que la prueba tenga que pagarse al precio de supuestos muy restrictivos; sin posibilidad alguna de probar la existencia del equilibrio singularmente determinado --o en todo caso, de un pequeño número de equilibrios posibles-- a un alto nivel de abstracción, sin embargo, un campo de fenómenos es realmente un caos que no está bajo control analítico. Además, obtenemos una respuesta sencilla y convincente a la pregunta formulada por los profanos relativa al bien que esperamos obtener de nuestra preocupación por el 'equilibrio' determinado", y la interrogante más concreta del porqué este concepto jugó tal papel en el pensamiento de Walras y de Marshall.

¹ A pesar de su uso generalizado, el calificativo de neoclásico no ha sido unánimemente aceptado. Aunque Shumpeter (1975, pág. 142) aceptara calificar a Marshall como neoclásico, puesto que intentó "salvar" dentro de un nuevo sistema buena parte de la economía clásica inglesa, consideraba tan injusto calificar a Walras de neoclásico como a Einstein de newtoniano: a tal punto reconoció la originalidad de su trabajo.

En su inconclusa *Historia del Análisis Económico*, Shumpeter (1975, pág. 179), escribe con entusiasmo sobre la idea del equilibrio: no creía que su uso por los economistas fuese algo tomado en préstamo “legítimo o ilegítimo” de la física, puesto que las “categorías lógicas” son “tan generales como la lógica misma” y “son elaboradas por la misma mente humana”. Sin embargo, para 1950, año de su muerte, ya había considerado las dificultades causadas por los supuestos de racionalidad utilizados, la interpretación de la estabilidad del equilibrio, la incorporación del tiempo en las teorías económicas y las limitaciones de su uso para justificar el *laissez faire* o el socialismo de mercado. Quedaban muchos problemas por resolver. Afortunadamente, dicho año la teoría recibió un aporte extraordinario, que contribuyó definitivamente a replantearlos. La publicación de la demostración de la existencia del equilibrio de un juego finito no cooperativo por Nash (1950) dio una idea esencial para la prueba de la existencia del equilibrio general de Arrow y Debreu (1952), y ofreció nuevas herramientas matemáticas para reconsiderar los problemas que Walras (1987) dejó pendientes desde 1900.

Los métodos matemáticos aplicados a partir de 1950 a la teoría estática del equilibrio general permitieron utilizar el mismo marco general para estudiar economías con incertidumbre y con tiempo. Además, condicionaron nuestra capacidad para emitir juicios con respecto a los resultados sociales obtenidos. Los nuevos modelos pudieron utilizarse como bases para importantes trabajos sobre la necesidad de la intervención de los gobiernos, sobre sus instrumentos y sobre su capacidad para alterar los resultados sociales [ver, por ejemplo, Lucas (1972)]. Sin embargo, los requisitos matemáticos debilitaron de modo alarmante el poder de los modelos para sostenerse a sí mismos al retirar algunos supuestos claves, como la racionalidad individual neoclásica, información perfecta, ausencia de comportamientos estratégicos y ausencia de instituciones que evolucionen con el tiempo. El uso de matemáticas cada vez más complejas difícilmente ha permitido a responder a críticas formuladas por North (1990) y Stiglitz (1994), entre otros. Los “equilibristas”, como eran llamados los autores neoclásicos del siglo XIX por algunos historiadores hostiles, están en problemas en el siglo XXI [ver Arrow (1987)].

A pesar de sus limitaciones, la teoría del equilibrio general, en ocasiones llamado equilibrio Walrasiano, es de importancia central en el estudio de la economía. Resume casi doscientos años de discusiones en torno a la posibilidad de lograr soluciones óptimas permitiendo el funcionamiento de los mercados, como un mecanismo descentralizado de asignación de bienes y factores de producción de una economía hipotética. Bajo su influencia se han formado generaciones de economistas, y se han justificado posiciones políticas extremas. Además, las críticas contra la llamada escuela neoclásica han dado origen a nuevos e influyentes programas de investigación, que contribuyen a explicar problemas que quedan fuera del alcance de la teoría del equilibrio general, y que ponen en entredicho su validez.

La intención de este trabajo es facilitar al lector el estudio de la teoría del equilibrio general tal como se enseñaba a finales del siglo XX en los cursos de microeconomía de doctorado. Para ello, se ha tomado como referencia central el libro de Mas-Colell, Whinston y Green (1995), seleccionando los temas que puedan asimilarse a nivel de pregrado. Este libro se divide en seis Capítulos. Los primeros dos contienen elementos de topología y análisis real. A pesar de ser este un trabajo introductorio, que ofrece algunos de

los conceptos matemáticos indispensables para leer trabajos como los escritos por Arrow y Hahn (1977) y Debreu (1987), no contiene todos los necesarios para tal fin. Se supone que los lectores conocen el cálculo diferencial y el álgebra de matrices.

El tercer Capítulo presenta el concepto de equilibrio Walrasiano en un modelo estático, suponiendo economías con y sin empresas. En él se exponen los problemas de existencia, unicidad y estabilidad en economías regulares, y se demuestran los dos teoremas del bienestar. El cuarto Capítulo extiende los resultados del tercero a un modelo con incertidumbre, derivando nuevos resultados para economías sin empresas con mercados de activos a partir de modelos formalmente equivalentes a los discutidos en el tercer Capítulo. En el quinto se presentan modelos de equilibrio general con horizonte finito e infinito, en economías con un consumidor y una empresa, que, bajo ciertas circunstancias, pueden extenderse a modelos con varios consumidores y varias empresas. En este Capítulo se presentan nuevos problemas: ¿cómo calcular trayectorias de equilibrio? ¿qué debemos suponer para poder hacerlo? ¿cómo pueden ser dichas trayectorias?

Aunque los primeros Capítulos ofrecen definiciones formales y demostraciones para algunas de sus afirmaciones, en el último Capítulo sólo se comentan algunas aplicaciones de la teoría del equilibrio general y algunas de las críticas en contra de la relevancia de sus resultados para explicar el comportamiento de las economías del mundo.

I. Conceptos matemáticos básicos: conjuntos

Introducción

En este Capítulo se introducen las definiciones de conjuntos, relaciones, puntos y sucesiones más importantes para referirse a elementos y subconjuntos del espacio euclídeo, R^N , en el contexto de la teoría del equilibrio general. Por último, se presenta la prueba del teorema del hiperplano separador, indispensable para probar el segundo teorema del bienestar.

En el próximo Capítulo, se presentan algunas nociones básicas relacionadas con funciones cuyo dominio y rango son subconjuntos de R^N y R^M .

El contenido de ambos Capítulos se eligió teniendo en cuenta los Capítulos introductorias de Campbell (1992), Debreu (1987) y Starr (1997). Para estudios más profundos, son recomendables Apostol (1982), Apostol (1985), Armstrong (1983), Fuente (1999), Gemignani (1972), Hotching y Young (1961), Marsden y Hoffman (1998), Maunder (1996), Mendelson (1975), Pontryagin (1999), Stephen (1989), Sundaram (1996), Takayama (1993) y Wall (1972).

1. Notación de conjuntos y operaciones básicas

Un *conjunto* se define como una colección de *elementos* perfectamente distinguibles entre sí. La forma más sencilla de denotar a un conjunto es utilizando una letra latina mayúscula. Para denotar un elemento, la forma más sencilla es utilizar una letra latina minúscula. Para denotar la relación de pertenencia de un elemento respecto a un conjunto suele utilizarse el símbolo $\in$. Así, la expresión

$$a \in A$$

se lee como “ a pertenece a A ”. En ocasiones, los elementos de un conjunto son conjuntos. Nos referiremos a tales casos posteriormente.

En este trabajo utilizaremos frecuentemente los conjuntos de números naturales, que denotaremos N , y de números reales, que denotaremos R . No definiremos estos conjuntos, pero supondremos que son suficientemente conocidos por el lector.

Para definir a un conjunto, es necesario conocer a todos sus elementos, o disponer de una proposición lógica $P(x)$ cuya satisfacción permita identificar a un elemento del conjunto. Esto último suele escribirse como

$$A = \{a : P(a)\}$$

que se lee como “el conjunto A está formado por todos los a tales que la proposición $P(x)$ es verdadera”.

Si la proposición $P(x)$ implica una contradicción, nada puede satisfacerla. En este caso, se afirma que el conjunto no tiene elementos, y se le llama *conjunto vacío*, $\emptyset$.

Todos los elementos de un conjunto A pueden pertenecer a otro conjunto B . En este caso, se dice que el primero es *subconjunto* del segundo. Esto se escribe del siguiente modo

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B),$$

donde “ $\Leftrightarrow$ ” se lee como “sí y sólo sí” y “ $\Rightarrow$ ” como “implica”.

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $B = A$, y se dice que B y A son iguales entre sí, y que uno es *subconjunto impropio* de otro. Igualmente, se dice que $\emptyset$ es subconjunto impropio de todo conjunto. Cuando $A \subseteq B$ y $B \not\subseteq A$, se dice que A es un subconjunto propio de B , lo que se denota como $A \subset B$.

Dada una proposición lógica, un subconjunto A de B puede denotarse como

$$A = \{a \in B : P(a)\}.$$

Se llama *conjunto universal* X a aquel que no es subconjunto propio de otro. En algunos casos, un conjunto de subconjuntos de X , llamado *familia indizada de conjuntos* puede denotarse como

$$A = \{A_i : A_i \subseteq X, i \in I\},$$

donde $I \subseteq N$ es el *conjunto de índices de la familia*.

Las operaciones básicas entre conjuntos son unión, intersección, diferencia y complemento. Las leyes de Morgan establecen las relaciones entre ellas [ver Stoll (1963)]. A continuación, para fines de notación, presentamos las cuatro operaciones.

El conjunto *unión* de A y B , subconjuntos de un conjunto universal X , se denota $A \cup B$. Es el conjunto formado por todos los elementos de ambos conjuntos. Ello se escribe como

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

Obsérvese el conector lógico $\vee$, que se lee “o”, y que afirma que en el conjunto $A \cup B$ puede haber elementos de A , de B o de ambos. El conjunto unión de dos o más conjuntos se define como

$$\bigcup A = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}$$

Nótese el cuantificador existencial $\exists$, que significa “existe algún”.

El conjunto *intersección* de A y B , denotado $A \cap B$, es el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos. Ello se escribe como

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Obsérvese el conector lógico $\wedge$, que se lee “y”. El conjunto intersección de dos o más conjuntos se define como

$$\bigcap A = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \ \forall i \in I\}$$

Nótese el cuantificador universal, $\forall$, que se lee “para todo”.

El conjunto *diferencia* de A con respecto a B , denotado $A - B$, o $A \setminus B$, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B . Ello se escribe como

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

El conjunto *complemento* de A con respecto al conjunto universal X , se define como la diferencia de X con respecto a A . Ello se escribe como

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\}$$

2. Relaciones binarias

Las relaciones binarias permiten definir funciones y ordenar conjuntos. A continuación presentamos algunos conceptos básicos.

a. Relaciones binarias y funciones

El conjunto *producto cartesiano* de X por Y se escribe como

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\},$$

y está formado por todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a X y cuya segunda componente pertenece a Y . El producto cartesiano de N conjuntos $X_i \subseteq X$ puede escribirse como

$$\prod_{i=1}^N X_i = \{(x_1, \dots, x_N) : x_i \in X_i \subseteq X, i=1, \dots, N\},$$

siendo cada elemento una N -upla ordenada. Si los N conjuntos X_i son iguales, $\prod_{i=1}^N X_i \equiv X^N$, donde $\equiv$ significa "idéntico". Uno de los productos cartesianos que utilizaremos con más frecuencia es el *espacio euclídeo*, R^N , cuyos elementos se denotarán como $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$. Cada componente de esta N -upla ordenada es, por supuesto, un número real.

Regresemos al caso $X \times Y$. Llamaremos *relación binaria* de X a Y a cualquier conjunto $R \subseteq X \times Y$. Si $Y = X$, se dice que la relación está definida sobre X . Si $(x, y) \in R$, entonces se dice que x está relacionado con y . Esto puede escribirse como xRy . En caso contrario, escribiremos $x \neg Ry$.

A partir de dos relaciones binarias, digamos R y S , podemos componer una tercera relación, $R \circ S = \{(x, z) : \exists y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$. Esta relación es llamada *compuesta*.

Cuando xRy , y recibe el nombre de *imagen* de x . El *conjunto de imágenes* de x bajo R se define como

$$R(x) = \{y \in Y : (x, y) \in R\}.$$

El conjunto imagen de $A \subseteq X$ bajo R se define como $R(A) = \bigcup_{x \in A} R(x)$.

A partir de R se define la *relación inversa* $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$. El *conjunto imagen inversa* de y bajo R es su conjunto imagen bajo R^{-1} , por lo que, dado $B \subseteq Y$, $R^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} R^{-1}(y)$.

Utilizando los conceptos de imagen e imagen inversa, se definen los conjuntos *dominio*

$$D_R = R^{-1}(Y) = \{x \in X : R(x) \neq \emptyset\}$$

y *rango*, o recorrido, en

$$R_R = R(X) = \{y \in Y : R^{-1}(y) \neq \emptyset\}$$

de la relación.

Se dice que una relación R es una *función* sí y sólo sí

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad \text{tal que } y = R(x)$$

donde $\exists!$ se lee “existe exactamente un elemento”. En general, se escribe $f : X \rightarrow Y$ para hacer referencia a una función f de X a Y . Una función es *inyectiva* si

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

es *sobreyectiva* si

$$f(X) = Y,$$

y es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Si una función f es inyectiva, su inversa es la función $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$. Si es biyectiva, su inversa es la función $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

Dos conjuntos A y B son *coordinables* o *equipotentes* si existe una función biyectiva con dominio en A y rango en B . Se dice que un conjunto A es *finito* con *cardinal* c si es coordinable con $\{1, 2, \dots, c\} \subset \mathbb{N}$. El conjunto vacío $\emptyset$ se considera finito con cardinal 0. Si A no es un conjunto finito, se dice que es *infinito*. Un conjunto infinito coordinable con $\mathbb{N}$ es llamado conjunto infinito *numerable* (o contable) con cardinal $\aleph_0$ (*aleph* cero). De no ser coordinable con $\mathbb{N}$, es llamado conjunto infinito no numerable.

b. Relaciones de equivalencia, preorden y orden, y sus propiedades

Las propiedades más frecuentes utilizadas para caracterizar una relación binaria, [ver Ellickson (1993), Glaewe *et al.* (1982), Kreps (1990) y Kreps (1998)] son

Propiedad	Definición
Reflexividad	$xRx \quad \forall x \in X$
Irreflexividad	$x \neg Rx \quad \forall x \in X$
Completitud	$(xRy) \vee (yRx) \quad \forall x, y \in X \text{ tales que } x \neq y$
Transitividad	$(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in X$
Negativa transitividad	$(x \neg Ry) \wedge (y \neg Rz) \Rightarrow x \neg Rz \quad \forall x, y, z \in X$
Simetría	$xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in X$
Asimetría	$xRy \Rightarrow y \neg Rx \quad \forall x, y \in X$
Antisimetría	$(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$

Los tipos de relaciones binarias, según sus propiedades, son

Propiedad	RE	POP	POC	OD	OP	OC
Reflexividad	*	*	*		*	*
Irreflexividad				*		
Completitud			*			*
Transitividad	*	*	*	*	*	*
Negativa transitividad				*		
Simetría	*					
Asimetría				*		
Antisimetría					*	*

donde

RE = relación de equivalencia

POP = preorden (o cuasiorden) parcial

POC = preorden (o cuasiorden) completo (o total)

OD = orden débil

OP = orden parcial

OC = orden completo (o total)

Una relación binaria definida sobre un conjunto X permite ordenarlo de un modo predeterminado. Una relación de equivalencia permite formar subconjuntos de X , llamados *clases de equivalencia*, cuyos elementos satisfacen todos una misma condición cada uno con respecto a los demás. Las relaciones de orden y preorden permiten comparar dos elementos del conjunto X estableciendo cuál de los dos domina al otro según un criterio específico. Así, por ejemplo, la relación de *igualdad* “=” entre los números reales es una relación de equivalencia sobre R . La relación *mayor o igual que*, “ $\geq$ ”, es un orden total sobre R . La relación *es subconjunto de*, “ $\subseteq$ ”, es un orden parcial sobre el conjunto de subconjuntos de X . La relación *es débilmente preferido a*, “ $\succeq$ ”, definida sobre un conjunto de bienes, es un preorden completo. Un *conjunto preordenado* por $\succeq$ suele escribirse como $(X, \succeq)$.

c. Maximales y minimales en conjuntos preordenados

En un conjunto preordenado X , los elementos que no son dominados por ningún otro dentro del mismo X son llamados *maximales*. Si hay más de uno, todos son equivalentes entre sí. Ello puede ocurrir sólo si la relación binaria no es antisimétrica. Si la relación es antisimétrica, el preorden es un orden, y el maximal único. Si, además, el orden es completo, el maximal es llamado elemento *máximo* del conjunto X con respecto a la relación de orden. De un modo similar podemos definir los conceptos contrarios correspondientes: *minimal* y *mínimo*.

El orden total $\geq$ definido sobre R permite introducir conceptos adicionales, en relación a un $X \subseteq R$: cota superior, cota inferior, supremo e ínfimo.

Una *cota superior* de $X \subseteq R$ es un número $u \in R$ (no necesariamente $u \in X$) tal que $u \geq x$ para todo $x \in X$. Un conjunto $X \subseteq R$ para el cual existe una cota superior se dice que es *acotado por arriba*. Si existe una cota superior, hay infinitas cotas superiores. La menor cota superior es llamada *supremo* de X , $s = \sup X$. Si $s \in X$ se dice que s es un *máximo*.

Una *cota inferior* de $X \subseteq R$ es un número $l \in R$ (no necesariamente $l \in X$) tal que $l \leq x$ para todo $x \in X$. Un conjunto $X \subseteq R$ para el cual existe una cota inferior se dice que es *acotado por abajo*. Si existe una cota inferior, hay infinitas cotas inferiores. La menor cota inferior es llamada *ínfimo* de X , $i = \inf X$. Si $i \in X$ se dice que i es un *mínimo*.

Se dice que un conjunto $X \subseteq R$ es *acotado* si está acotado por arriba y por abajo.

3. Campos y espacios vectoriales

Una *estructura algebraica* $A = \{(X_i), O\}$ es una colección formada por uno o más conjuntos X_i (cuyos elementos son numéricos, generalmente) y un conjunto O de operaciones definidas sobre X_i . Dado un conjunto X , una *operación N-aria* en X es una función $*$: $X^N \rightarrow X$. Una operación binaria $*$: $X^2 \rightarrow X$ es llamada *ley de composición interna* sobre X . Se dice que X es *cerrado* con respecto a dicha operación.

A continuación, nos referiremos a las dos estructuras algebraicas que son de nuestro interés en este trabajo: campos y espacios vectoriales [ver Fuente (1999) y Sundaram (1996)]. Un *campo* $F = \{F, +, \cdot\}$ es una estructura algebraica formada por el conjunto F y dos operaciones binarias ($N = 2$) definidas en F , llamadas suma (o adición) “+” y multiplicación “.”, que cumplen con las siguientes propiedades:

- para la suma

Asociativa	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
Conmutativa	$\forall \alpha, \beta \in F \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$
Elemento neutro	$\forall \alpha \in F \quad \exists 0 \in F \text{ tal que } \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \quad \alpha \in F$
Elemento inverso	$\forall \alpha \in F \quad \exists (-\alpha) \in F \text{ tal que } \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$

- para la multiplicación

Asociativa	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
Conmutativa	$\forall \alpha, \beta \in F \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Elemento neutro	$\forall \alpha \in F \quad \exists 1 \in F \text{ tal que } \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
Elemento inverso	$\forall \alpha (\neq 0) \in F \quad \exists \alpha^{-1} \in F \text{ tal que } \alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$

Distributiva con respecto a la suma	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F \quad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
-------------------------------------	--

Un *espacio vectorial* V se define sobre un campo F , siempre que puedan definirse las operaciones binarias suma de vectores (los elementos de V) y multiplicación de vectores por escalares (los elementos de F) con las siguientes propiedades:

- para la suma de vectores $V \times V \rightarrow V$

Asociativa	$\forall x, y, z \in V \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
Conmutativa	$\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$
Elemento neutro	$\forall x \in V \quad \exists 0 \in V \text{ tal que } x + 0 = 0 + x = x \quad x \in V$
Elemento inverso	$\forall x \in V \quad \exists (-x) \in V \text{ tal que } x + (-x) = (-x) + x = 0$

- para la multiplicación de vectores por escalares $F \times V \rightarrow V$

Asociativa	$\forall x, y \in V \quad \forall \alpha \in F \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
Conmutativa	$\forall x \in V \quad \forall \alpha, \beta \in F \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
Elemento neutro	$\forall x \in V \quad \forall \alpha, \beta \in F \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
Elemento inverso	$\forall x \in V \quad 1 \in F \quad 1x = x$

El conjunto de los números reales, R , cumple con los requisitos para ser un campo. También para ser un espacio vectorial definido sobre R . Así mismo, el espacio euclídeo, R^N , es un espacio vectorial definido sobre R . En este trabajo sólo necesitaremos tener algunos conocimientos sobre R y R^N .

4. Espacios producto interior, métricos, normados y topológicos

Sobre los espacios vectoriales pueden definirse las cuatro estructuras que presentaremos a continuación: espacio producto interior, espacio normado, espacio métrico y espacio topológico. Para los tres primeros es necesario poder hallar alguna función que cumpla con ciertas propiedades preestablecidas. Tales funciones son llamadas producto interior, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, norma, $\| \cdot \|$ y métrica d . En cada uno de ellos puede hallarse más de una función que satisfaga los requisitos. En el caso de los espacios topológicos, es necesario que se cumplan algunas condiciones sobre algunos subconjuntos del espacio vectorial, llamados conjuntos abiertos.

El espacio euclídeo, R^N , es un espacio vectorial definido sobre R y, a la vez, un espacio producto interior, normado, métrico y topológico. Una de las funciones más sencillas que permiten hacer estas afirmaciones es la *distancia euclídea* entre dos puntos, $x, y \in R^N$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

que puede obtenerse a partir de un producto interior, y cumple con las condiciones impuestas sobre la norma y la métrica, que veremos más adelante. Además, la distancia euclídea permite definir conjuntos abiertos en R^N , por lo que puede generarse un espacio topológico en R^N utilizando dicha función.

A continuación, presentaremos las propiedades que debe satisfacer una función para ser producto interior, norma o métrica sobre un espacio vectorial V sobre R .

a. Espacio producto interior

Un *producto interior* sobre V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R$ que satisface para todo $x, y \in V$ las siguientes propiedades

Propiedad	Definición
Simetría	$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
Bilinealidad	$\langle ax + by, z \rangle = \langle ax, z \rangle + \langle by, z \rangle$ $\langle z, ax + by \rangle = \langle z, ax \rangle + \langle z, by \rangle$
No negatividad	$\langle w, w \rangle \geq 0, \quad \langle w, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$

Un par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio producto interior*. Un ejemplo de producto interior sobre $V = R^N$ es el *producto interior euclídeo*,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

que podemos utilizar para definir la distancia euclídea con $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$

y

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle^{\frac{1}{2}} = [(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

b. Espacio normado

Una *norma* es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow R$ que satisface para todo $x, y \in V$ las siguientes propiedades

Propiedad	Definición
No negatividad	$\ x\ \geq 0, \quad \ x\ = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Homogeneidad	$\ ax\ = a \ x\ $
Desigualdad triangular	$\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\ $

Un par $(V, \|\cdot\|)$ es un *espacio producto interior*. Todo producto interior sobre V genera una norma sobre V , como puede notarse al verificar el cumplimiento de las propiedades referidas por $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. La distancia euclídea sobre $V = \mathbb{R}^N$ es un ejemplo de una norma generada de este modo. Puesto que es posible construir normas que no se generen a partir de un producto interior, se dice que la norma es una función menos restrictiva que el producto interior.

c. Espacio métrico

Una *métrica* sobre V es una función $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface para todo $x, y \in V$ las siguientes propiedades

Propiedad	Definición
No negatividad	$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
Simetría	$d(x, y) = d(y, x)$
Desigualdad triangular	$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un par (V, d) es un *espacio métrico*. Toda norma genera una métrica. Obsérvese que para todo $x, y \in V$, puede definirse un vector $w = (x - y) \in V$, cuya norma, $\|x - y\|$ cumple con las propiedades de una métrica. Por ello, $d(x, y) = \|x - y\|$.

Quizás la propiedad que parece menos evidentemente común a ambas funciones es la desigualdad triangular. En el caso de la norma, se escribe como

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

y en el de la métrica, como, cambiando un poco la notación,

$$\|a - b\| \leq \|a - c\| + \|b - c\|.$$

Nótese que ambas condiciones son equivalentes si $x = a - c$ e $y = c - b$.

b. Espacio topológico

Un *espacio topológico*, a diferencia de los espacios presentados previamente, no requiere de una función para su definición. En su lugar, se utiliza una colección τ de subconjuntos de V , que debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\emptyset, V \in \tau$$

$$O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$$

$$O_i \in \tau, \quad i \in I \subseteq N \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$$

donde τ es llamada *topología*, y los conjuntos O_i , son llamados *conjuntos abiertos*.

Un par (V, τ) es un *espacio topológico*. A partir de cualquier espacio métrico puede generarse un espacio topológico, utilizando la métrica d para generar τ .

En este trabajo, nos interesan únicamente los espacios vectoriales R y R^N , definidos ambos sobre R . A continuación, estudiaremos subconjuntos de dichos conjuntos, teniendo en cuenta que son espacios métricos, a partir de los cuales es posible generar topologías.

5. Conjuntos acotados, abiertos y cerrados en R^N

Dos definiciones esenciales para calificar a los subconjuntos de R^N son las de *N-bola abierta* y *N-bola cerrada* con centro en $\mathbf{x} \in R^N$ y radio $\varepsilon > 0$, que presentamos a continuación

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in X : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon\} \quad \text{y} \quad B_\varepsilon[\mathbf{x}] = \{\mathbf{y} \in X : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \varepsilon\},$$

e ilustramos para R^2 como

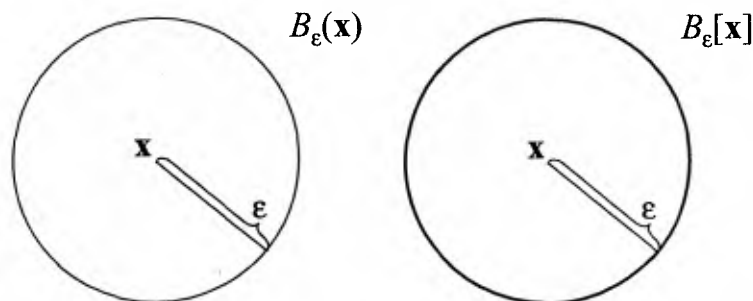


Figura I.5.1

Si $N=1$, $B_\varepsilon(x)$ es un segmento de la recta real, determinado por el intervalo abierto $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Si $N=3$, $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ es una esfera sin superficie. Por supuesto, si $n > 3$, $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ no es representable gráficamente.

Un conjunto $X \subset R^N$ es un conjunto acotado si existe un ε tal que $X \subseteq B_\varepsilon[\mathbf{x}]$ para cualquier $\mathbf{x}$. El siguiente subconjunto de R^2 es un ejemplo de conjunto acotado:

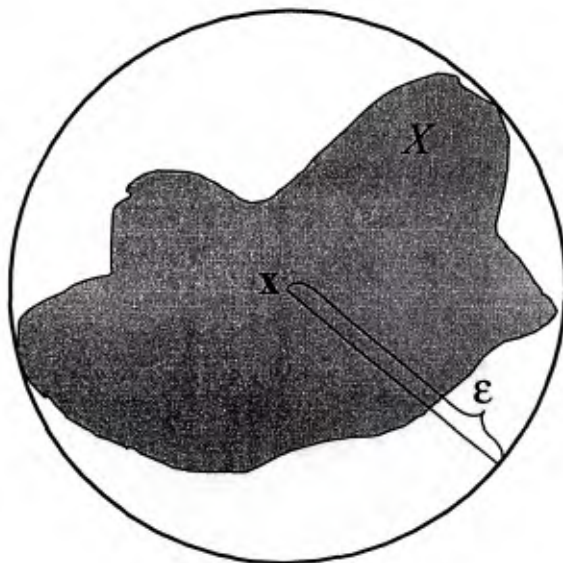


Figura I.5.2

Utilizando N -bolas abiertas, o simplemente, bolas abiertas, podemos clasificar los puntos de R^N como *interiores* de X , $\mathbf{x}_i \in R^N$, *exteriores* de X , $\mathbf{x}_e \in R^N$, de *frontera* de X , $\mathbf{x}_b \in R^N$, o de *clausura* de X , $\mathbf{x}_c \in R^N$. Con ellos podemos definir los conjuntos *interior* de X , $\text{int } X$, *exterior* de X , $\text{ext } X$, *frontera* de X , ∂X , y *clausura* de X , $\text{cl } X$.

Un punto $\mathbf{x}_i \in R^N$ pertenece a $\text{int } X$ si y sólo si existe un ε tal que $B_\varepsilon(\mathbf{x}_i) \subseteq X$.

Un punto $\mathbf{x}_e \in R^N$ pertenece a $\text{ext } X$ si y sólo si existe un ε tal que $B_\varepsilon(\mathbf{x}_e) \subseteq X^c$.

Un punto $\mathbf{x}_b \in R^N$ pertenece a ∂X si y sólo si para todo ε se cumple que $B_\varepsilon(\mathbf{x}_b) \cap X \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(\mathbf{x}_b) \cap X^c \neq \emptyset$. Sólo existen puntos de frontera si $\text{ext } X \neq \emptyset$. Los puntos de frontera no necesariamente pertenecen a X .

Un punto $\mathbf{x}_c \in R^N$ pertenece a $\text{cl } X$ si y sólo si para todo ε se cumple que $B_\varepsilon(\mathbf{x}_c) \cap X \neq \emptyset$. Los puntos interiores y de frontera son puntos de clausura. Ocasionalmente, a los puntos de clausura se les llama puntos *adherentes*, y a $\text{cl } X$, *adherencia* de X , $\bar{X}$. Se dice que un conjunto $X \subseteq R^N$ es *denso* en $A \subseteq R^N$ si $A \subseteq \text{cl } X$.

De las definiciones dadas se siguen las siguientes relaciones:

$$\text{int } X \subseteq X \subseteq \text{cl } X$$

$$\text{int } X \cup \text{ext } X \cup \partial X = \mathbb{R}^N$$

$$\text{cl } X = \text{int } X \cup \partial X$$

$$\text{ext } X = \text{int } X^c$$

$$\partial X = \text{cl } X \cap \text{cl } X^c$$

En el siguiente conjunto de $X \subset \mathbb{R}^2$ podemos observar algunos ejemplos de los puntos interiores, exteriores y de frontera

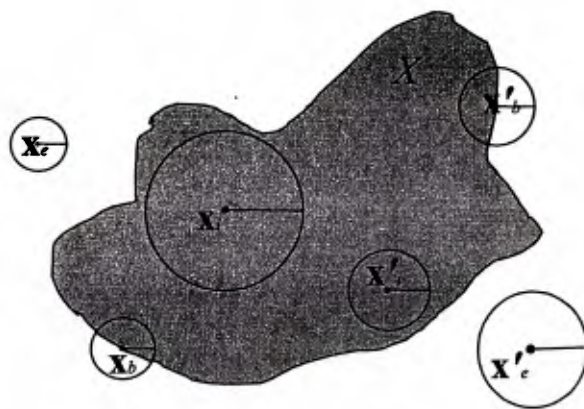


Figura I.5.3

Ejemplos adicionales de puntos interiores en un conjunto de $X \subset \mathbb{R}^3$ se presentan a continuación:

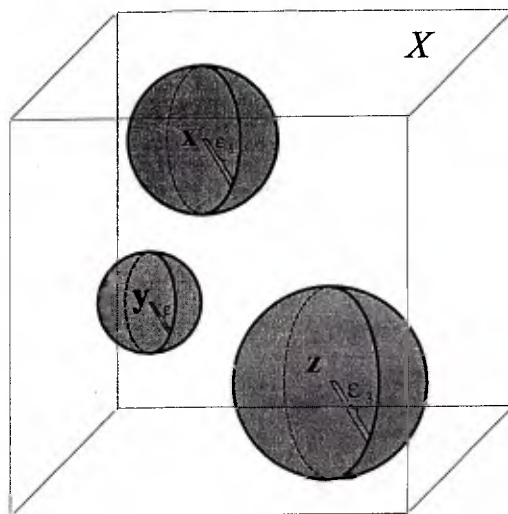


Figura I.5.4

La definición del punto de clausura permite definir dos tipos de puntos adicionales. Si la condición $B_\varepsilon(\mathbf{x}_a) \cap X \neq \emptyset$ es satisfecha únicamente por $\mathbf{x}_a$, se dice que $\mathbf{x}_a$ es un *punto aislado*. Un conjunto formado únicamente por puntos aislados es llamado *conjunto discreto*.

Si, por el contrario, la condición $B_\varepsilon(\mathbf{x}_L) \cap (X \setminus \{\mathbf{x}_L\}) \neq \emptyset$ es satisfecha para todo $\varepsilon > 0$, se dice que $\mathbf{x}_L$ es un *punto límite* o *punto de acumulación*. El conjunto de puntos límite es llamado *conjunto derivado*, $D(X)$.

Es importante notar que un punto aislado necesariamente pertenece a X . Un punto límite puede pertenecer o no a X . La condición que debe cumplir un punto límite requiere que, al menos, un punto distinto de $\mathbf{x}_L$ (sin especificar dónde se encuentre $\mathbf{x}_L$) pertenezca a $B_\varepsilon(\mathbf{x}_L)$ y a X .

Un conjunto $X \subseteq R^N$ es *abierto* en relación a R^N si es igual a su $\text{int } X$, y *cerrado* en relación a R^N si es igual a su $\text{cl } X$. Si no es igual a ninguno de tales conjuntos no es ni abierto ni cerrado. Si un conjunto $X \subseteq R^N$ es abierto, su complemento es cerrado. De las definiciones anteriores puede notarse que R^N es abierto y cerrado, por lo que su complemento, $\emptyset$, es cerrado y abierto. Un conjunto discreto $X \subseteq R^N$ es un conjunto cerrado, por ser igual a su $\text{cl } X$, y abierto, por ser igual a su $\text{int } X$.

Un conjunto $X \subseteq R^N$ puede clasificarse como abierto o cerrado en relación a un $S \subseteq R^N$ que le contenga. La única diferencia en relación a lo ya presentado se encuentra en la definición de bola abierta: en este caso, la bola es $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap S$.

Para fijar conceptos, demostraremos que un conjunto $X \subseteq R^N$ es cerrado en relación a R^N si y sólo si contiene a todos sus puntos límite. Si comenzamos por suponer que el conjunto es cerrado, ningún punto límite de X puede encontrarse fuera de él: su complemento es un conjunto abierto, por lo que existe algún ε tal que $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq X^c \Leftrightarrow B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X = \emptyset$. Podemos razonar en dirección contraria. Si X^c no es abierto, existe algún $\mathbf{x} \in X^c$ tal que, para todo ε , se cumple que $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \not\subseteq X^c \Leftrightarrow B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$. Con esto se demuestra que, si X contiene a todos sus puntos límites, X^c es abierto, por lo que X es cerrado.

La afirmación anterior no implica que un conjunto cerrado deba ser igual a su conjunto derivado, $D(X)$. Si $X \subset R^N$ es un conjunto discreto, $D(X) = \emptyset$, a pesar de lo cual es un conjunto cerrado. Sin embargo, si $X \subseteq R^N$ es cerrado y $D(X) \neq \emptyset$, necesariamente $D(X) \subseteq X$.

Revisaremos estos conceptos de nuevo posteriormente.

6. Sucesiones y subsucesiones

a. Definiciones básicas

Una *sucesión* es una función que asigna a cada número natural un elemento de un conjunto X , lo que puede escribirse como $s: N \rightarrow X$. El rango de una sucesión, cuyo elemento en $n \in N$ se denota $s(n) = x_n$, es un conjunto ordenado de elementos de X .

A partir de una sucesión $s: N \rightarrow X$, puede definirse una *subsucesión* por composición con una función estrictamente creciente, $g: N \rightarrow N$. Un elemento de una subsucesión en $k \in N$ se denota $s(g(k)) = x_{n_k}$.

Se dice que una sucesión en X *converge* a un punto $x \in X$, llamado *límite* x , si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in N \text{ tal que } n > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \quad [o \quad x_n \in B_\varepsilon(x)].$$

Si esto se cumple, puede escribirse $x_n \rightarrow x$, $\{x_n\} \rightarrow x$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Si no se cumple, se dice que la sucesión *diverge*, y se escribe $x_n \not\rightarrow x$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq x$. No deben confundirse los conceptos de límite y punto límite: una sucesión es una función, y no un conjunto. La sucesión $\{1, 1, 1, \dots\}$, por ejemplo, tiene por límite 1, pero 1 no es un punto límite del rango de la sucesión (recuérdese que 1 es un punto aislado en este caso). Ambos conceptos pueden relacionarse entre sí, como veremos luego. Sin embargo, conviene insistir en que para definir punto límite no se requirió del concepto de sucesión.

Una sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, o convergente en el sentido de Cauchy, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in N \text{ tal que } \forall m, n > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Toda sucesión convergente es de Cauchy. Un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X tiene su límite en X .

Para nuestros fines, X será el conjunto de los números reales, R , o el espacio euclídeo, R^N . La sucesión convergente más sencilla que se puede considerar en R es $\frac{1}{n}$, cuyo límite es 0. Otra, más interesante para algunas explicaciones posteriores, es la sucesión $\frac{1}{2^{n-1}}$. Esta sucesión se construye calculando para $n+1$ la mitad del número correspondiente a n , comenzando con $x_1 = 1$. Podemos notar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$. Observemos en el siguiente gráfico algunos aspectos relacionados con la definición de límite.

Si se elige $\varepsilon = \frac{1}{4}$, se cumple que $x_n \in B_{1/4}(0)$ para todo $n > N(1/4) \geq 3$. A menores valores de ε , mayores deben ser los valores de $N(\varepsilon)$ para que se cumpla la condición. Sin embargo, siempre es posible hallar dicho valor.

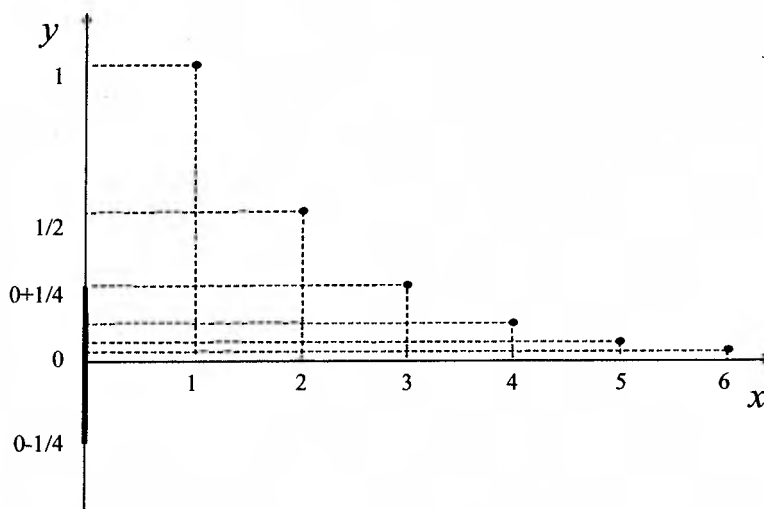


Figura I.6.1

A partir de una sucesión de números reales podemos formar una nueva sucesión: una sucesión de sumas parciales de dichos números, llamada *serie infinita*, o simplemente *serie*. En este caso, la convergencia de la sucesión implica que la suma de un número ilimitado de sumandos es finita. La sucesión $\frac{1}{2^{n-1}}$ nos permite presentar un ejemplo clásico

de una serie infinita convergente, que invalida la famosa paradoja de Zenón [ver Apostol (1985)]: por inducción matemática puede probarse que $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$ es igual a $\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$,

por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2$. En general, dicho resultado suele escribirse como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2$.

A continuación ilustramos la sucesión de sumas parciales comentada:

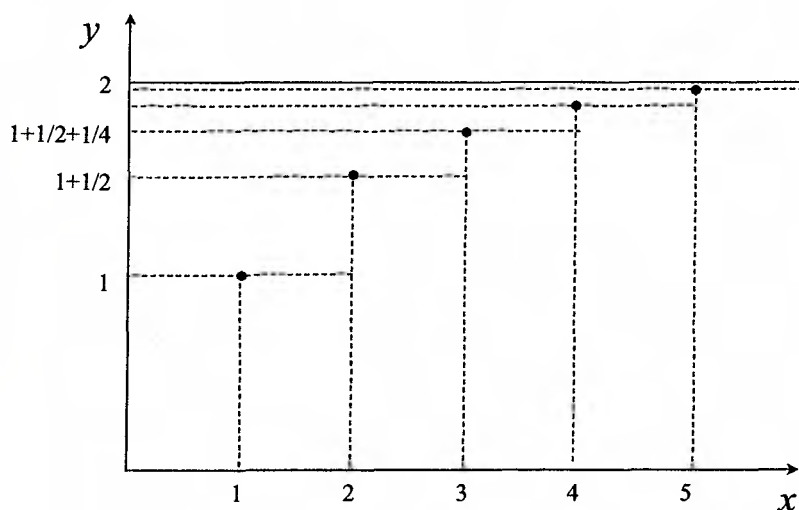


Figura I.6.2

Las dos sucesiones comentadas son *monótonas*: la primera es una *sucesión decreciente*, puesto que $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n . La segunda es *creciente*, porque $s_{n+1} \geq s_n$ para todo n . Ambas sucesiones son *acotadas*: la primera tiene como máximo 1 y como ínfimo 0, y la segunda como mínimo 1 y como supremo 2. Como hemos indicado, el límite de cada sucesión existe, aun cuando no es un elemento de su rango. Ello ilustra un importante resultado general: toda sucesión creciente (decreciente) de números reales acotada por arriba (por abajo) converge a su supremo (ínfimo). Aunque una sucesión acotada no monótona no tiene que ser convergente, es posible probar que puede obtenerse de ella al menos una subsucesión convergente en ella (a partir de subsucesiones monótonas). Este último resultado, conocido como *teorema de Bolzano-Weierstrass*, se comenta a continuación.

b. Teorema de Bolzano-Weierstrass

En primer lugar, probaremos el teorema para sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$ [ver Apóstol (1982) y Beardon (1997)]. Sea una sucesión tal que $x_n \in [a, b] \equiv [a_1, b_1]$ para todo n . Por el método de la bisección, obtenemos $c = \frac{a_1 + b_1}{2}$, que permite definir los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$. Si hay infinitos x_n en $[a, c]$, por ejemplo, denominamos al intervalo $[a_2, b_2]$. Dicho intervalo puede nuevamente dividirse en dos. Llamamos $[a_3, b_3]$ a uno de los intervalos que contenga infinitos x_n . La repetición de la bisección conduce a la sucesión de intervalos anidados

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

cada uno de los cuales contiene infinitos x_n . De cada intervalo puede extraerse un elemento del rango de la sucesión, que formen una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1], \quad x_{n_2} \in [a_2, b_2], \quad x_{n_3} \in [a_3, b_3], \quad \dots$$

y

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Puesto que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots < b$ y $a \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$ sabemos que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son monótonas y acotadas en $[a, b]$, por lo que tienen límite. Puesto que la longitud del intervalo $(b_n - a_n) = \frac{(b-a)}{2^{n-1}} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, el límite es el mismo para ambas sucesiones: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$. Por la misma razón, el límite de la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ es α : obsérvese que

$$|x_{n_k} - \alpha| < \frac{(b-a)}{2^{k-1}}.$$

Es conveniente notar que puede definirse más de una subsucesión con límite en α , y, en algunos casos, subsucesiones con límites diferentes a partir de una sucesión no convergente. Infinitos ejemplos del primer caso pueden hacerse con cualquier sucesión monótona. Del segundo caso, también pueden hacerse infinitos ejemplos a partir de la sucesión

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

El teorema de Bolzano-Weierstrass puede probarse en sucesiones acotadas definidas sobre R^N extendiendo el argumento presentado anteriormente. Para ello, es necesario definir un intervalo N -dimensional a partir de los intervalos cerrados de números reales que contengan a cada una de las componentes del punto x_n para todo N . A modo de ilustración, obsérvese el siguiente ejemplo. En él, el primer intervalo (de dimensión 2) es $[a_1, b_1] \times [a'_1, b'_1]$, los elementos de la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ se toman de una sucesión definida sobre el conjunto acotado $X \subset R^2$ y el límite de la subsucesión es α .

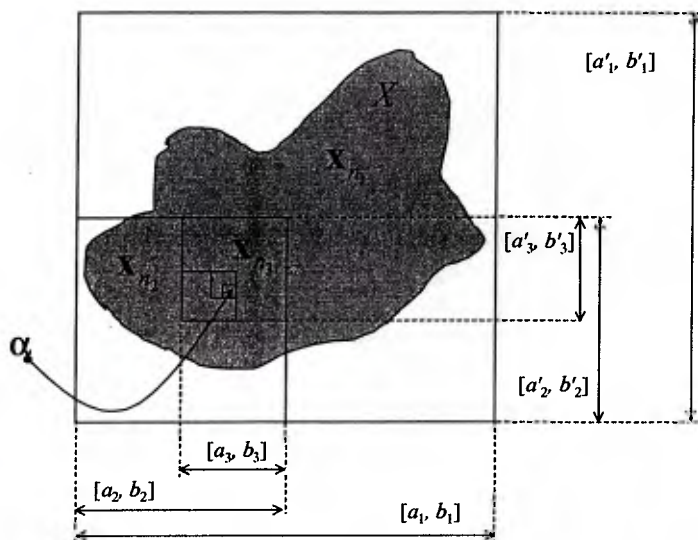


Figura I.6.3

c. Sucesiones, subsucesiones y conjuntos cerrados

Hemos afirmado previamente que un conjunto es cerrado sí y sólo sí contiene todos sus puntos límite. Podemos demostrar que un conjunto es cerrado sí y sólo sí toda sucesión convergente definida en él tiene su límite en él. Para ello, debemos probar que un punto $\mathbf{x}_L \in R^N$ es un punto límite de X sí y sólo sí existe una sucesión en $X \setminus \{\mathbf{x}_L\}$ que converja a él. Esto es lo que haremos a continuación. Primero partiremos desde el límite de una sucesión hacia el punto límite de un conjunto. Luego, desde el punto límite de un conjunto hacia el límite de una sucesión.

Si una sucesión definida en $X \setminus \{\mathbf{x}_L\}$ converge a $\mathbf{x}_L$, dado un $\varepsilon > 0$, siempre podrá hallarse un $N(\varepsilon)$ tal que $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_L) < \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$. Ello garantiza que, para cualquier $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\mathbf{x}_L) \cap (X \setminus \{\mathbf{x}_L\}) \neq \emptyset$, pudiendo afirmarse que $\mathbf{x}_L$ es un punto límite de X .

Si $\mathbf{x}_L \in R^N$ es un punto límite de X , para todo $n \in N$ debe cumplirse que $B_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}_L) \cap (X \setminus \{\mathbf{x}_L\}) \neq \emptyset$ con $\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Para todo $n \in N$ podemos elegir un elemento de X que pertenezca a $B_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}_L) \cap (X \setminus \{\mathbf{x}_L\})$, y al cual denotaremos $\mathbf{x}_n$. Con ellos se construye una sucesión $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_L$. Podemos ilustrar esta afirmación con el siguiente ejemplo, donde $X \subseteq R^2$:

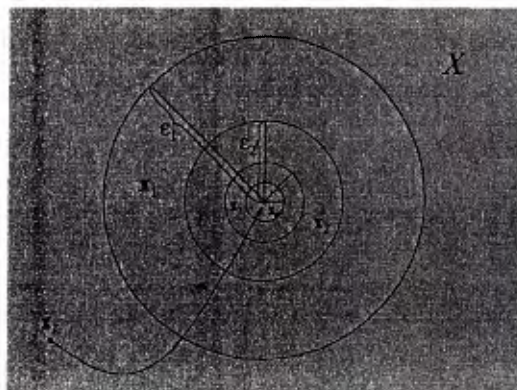


Figura I.6.4

En un conjunto pueden existir infinitos puntos límites, e infinitas sucesiones definibles con límite en cada uno de ellos. Esto también podemos ilustrarlo en $X \subset \mathbb{R}^2$:

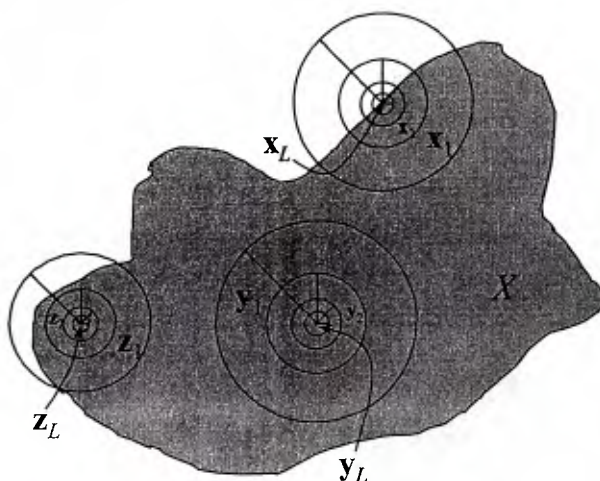


Figura I.6.5

Recordemos que un conjunto X es cerrado cuando contiene a todos sus puntos límite. Puesto que el límite de una sucesión definida en $X \setminus \{x\}$ es un punto límite de X , toda sucesión $x_n \rightarrow x$, con $x_n \in X$ y $x_n \neq x$ (para todo n) debe tener su límite x en X .

7. Conjuntos compactos, secuencialmente compactos, separados y conexos en $\mathbb{R}^N$

Hasta ahora hemos definido conjuntos acotados, abiertos y cerrados en $\mathbb{R}^N$. A partir de ellos, podemos definir cuatro tipos de conjuntos que serán de mucha importancia en este trabajo: conjuntos compactos, secuencialmente compactos, separados y conexos.

Para definir conjunto compacto debe definirse primero el conjunto *recubrimiento* de X . El recubrimiento de X es una colección de conjuntos $F = \{U_i : i \in I\}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Si todos los U_i son conjuntos abiertos, se dice que F es un *recubrimiento abierto* de X . Un conjunto X es *compacto* si cualquier recubrimiento abierto de X tiene un subconjunto finito que aun es un recubrimiento de X .

Un ejemplo puede ayudar a comprender la definición. La colección $F = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) : n \geq 2 \right\}$ es un recubrimiento abierto de $X = (0,1)$. No existe un subconjunto finito de F que contenga a X . Por tanto, X no es un conjunto compacto.

En espacios métricos puede probarse que toda sucesión de elementos definida en un conjunto compacto X tiene una subsucesión convergente con límite en X . Conjuntos con esta propiedad se dice que son *secuencialmente compactos*.

Puede demostrarse que todo conjunto X compacto es cerrado y acotado. Si, además de ser compacto, es discreto, el conjunto X es finito.

Dos conjuntos A y B son *separados* si $A \cap \text{cl } B = \emptyset$ y $\text{cl } A \cap B = \emptyset$. Un conjunto C es *conexo* si no es la unión de dos conjuntos separados no vacíos. Cuando un conjunto es conexo no es posible obtener dos conjuntos cerrados (o abiertos) cuya unión sea el conjunto C , y cuya intersección sea vacía.

Observemos que el siguiente conjunto es acotado y, si contiene a su frontera, cerrado. Por tanto, es un conjunto compacto, y secuencialmente compacto. Además, observemos que no es posible obtenerlo como unión de dos conjuntos separados no vacíos. Por tanto, es un conjunto conexo.

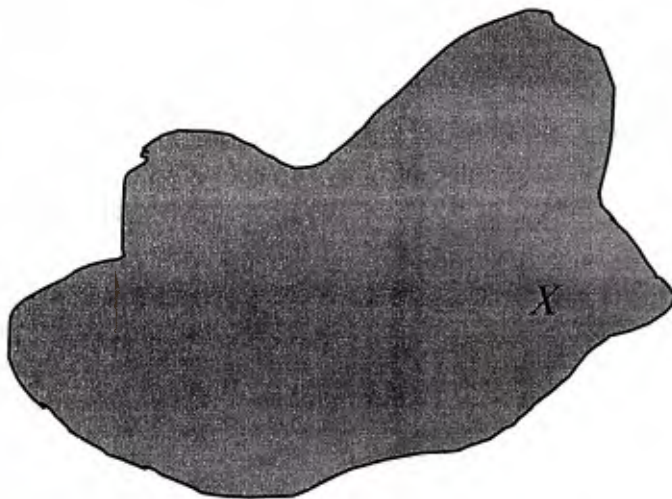


Figura I.7.1

8. Conjuntos convexos

El último tipo de conjunto que vamos a definir es el conjunto convexo. Para esta definición, no se hace referencia a conjuntos abiertos, cerrados o acotados, ni se utilizan sucesiones convergentes. Se requiere un concepto nuevo: el de combinación convexa. Se dice que un punto $\mathbf{x}^* \in R^N$ es una *combinación convexa* de los puntos $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^N \in R^N$ si existen N números reales $p_1, p_2, \dots, p_N$ tales que

$$\mathbf{x}^* = p_1 \mathbf{x}^1 + p_2 \mathbf{x}^2 + \dots + p_N \mathbf{x}^N$$

con

$$p_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad \text{siendo } i = 1, \dots, N.$$

Nótese que los puntos $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^N$ son elegidos arbitrariamente. Se identifican con un superíndice para evitar confusiones con los elementos que forman sucesiones o subsucesiones. Suponiendo que $p_1 = a$ y que $p_i = 0$ si $i > 2$, puede escribirse

$$\mathbf{x}^* = a \mathbf{x}^1 + (1-a) \mathbf{x}^2$$

como combinación convexa de $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$.

Se dice que $X \subseteq R^N$ es un *conjunto convexo* si, para cualesquiera $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, $\mathbf{x}^3$ también es un elemento de X , siendo

$$\mathbf{x}^3 = a \mathbf{x}^1 + (1-a) \mathbf{x}^2$$

donde a es un número real arbitrariamente escogido entre 0 y 1, inclusive. El elemento $\mathbf{x}^3$ es una combinación convexa de $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$. Puesto que hay infinitos valores posibles para a , para cada par de puntos $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ hay infinitos puntos $\mathbf{x}^3$ posibles, que se coleccionan en un conjunto que puede llamarse *segmento* $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$. El conjunto X es convexo si todas las combinaciones convexas que pertenecen al segmento $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$ pertenecen a X .

Si disponemos del gráfico de $X \subseteq R^2$, podemos determinar si es convexo o no, trazando una línea recta entre dos puntos cualesquiera que pertenezcan al conjunto. Si todos los puntos de la recta se encuentran en X , el conjunto es convexo. Como ejemplo, obsérvese que el siguiente conjunto no es convexo.

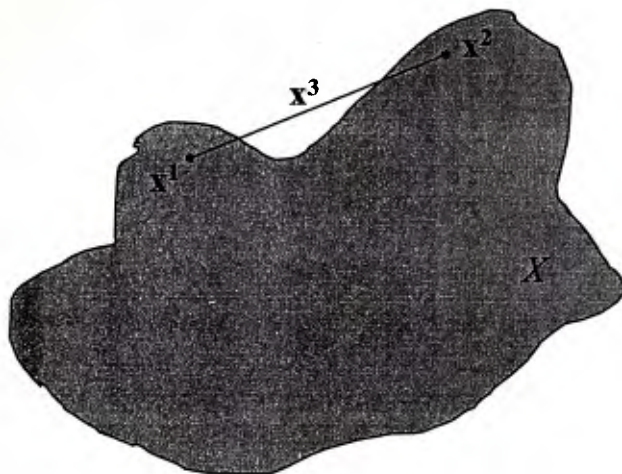


Figura I.8.1

9. Hiperplanos

Un hiperplano con normal $\mathbf{p}$ y constante k es un conjunto convexo

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = k\}.$$

Por medio de un hiperplano es posible definir dos subespacios cerrados, denominados semiespacios cerrados positivo y negativo, y denotados

$$H_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq k\} \quad H_- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq k\}.$$

Dos conjuntos convexos disjuntos, $A, B \subset \mathbb{R}^N$, pueden colocarse cada uno en uno de dichos semiespacios. En dicho caso, el hiperplano es llamado separador. Consideremos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$:

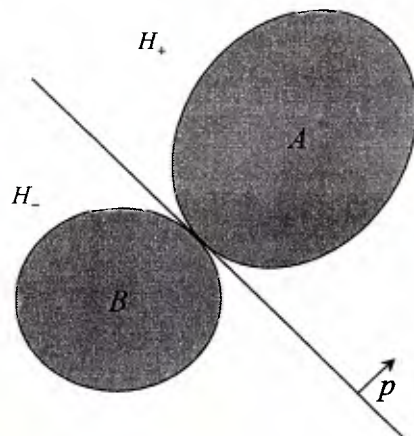


Figura I.9.1

Esta afirmación es el teorema del hiperplano separador. Probarlo requiere probar, en primer lugar, el teorema del hiperplano acotador. Es lo primero que haremos a continuación.

a. Teorema del hiperplano acotador

Dado un conjunto convexo $K \subseteq \mathbb{R}^N$ y un $z \in \mathbb{R}^N$, $z \notin \text{Int } K$, existe un hiperplano H con normal $\mathbf{p}$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in K$, se cumpla que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$. A este hiperplano se le llama acotador para K a través de z .

La prueba de dicha afirmación se presenta a continuación en dos partes.

Primera Parte

Demostrar que, para todo $\mathbf{x} \in K \subset \mathbb{R}^N$, siendo K cerrado y convexo, y un $z \in \mathbb{R}^N$, $z \notin K$, existen un $\mathbf{y} \in K$ y un $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, tales que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} < k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

Demostración:

1. Sea $\mathbf{y}$ el vector que minimiza $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ para todo $\mathbf{x} \in K$. Sean $\mathbf{p} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ y $k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$.
2. Para demostrar que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} < k$, se sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{z} - \mathbf{y}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \\ &= -\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} < k \end{aligned}$$

3. Para demostrar que $k \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$, se procede por contradicción.

Sabiendo que $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$ es la distancia euclídea mínima entre $\mathbf{z}$ y cualquier $\mathbf{x} \in K$, puede afirmarse que

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| < 0$$

para cualquier $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} = \mathbf{y} + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in K$, con $\alpha \in [0,1]$.

Para evitar dificultades con las raíces cuadradas, se sustituye la sustracción anterior por $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|^2$, que también debe ser menor que cero. Esta última puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
\|z - y\|^2 - \|z - w\|^2 &= \|z - y\|^2 - \|(z - y) - \alpha(x - y)\|^2 \\
&= (z - y)(z - y) \\
&\quad - [(z - y)(z - y) - 2\alpha(z - y)(x - y) + \alpha^2(x - y)(x - y)] \\
&= -\alpha[2p \cdot (x - y) + \alpha(x - y)(x - y)]
\end{aligned}$$

De suponer que $k > p \cdot x$, es posible que $\|z - y\|^2 - \|z - w\|^2 > 0$ para un $\alpha > 0$ lo suficientemente pequeño. Por ello, necesariamente $k \leq p \cdot x$.

Conclusión: con esto se demuestra que $p \cdot z < p \cdot x$ para todo $x \in K$.

Segunda parte

Demostrar que, para todo $x \in K \subseteq \mathbb{R}^N$, siendo K convexo (y no necesariamente cerrado), y un $z \in \mathbb{R}^N$, $z \notin \text{Int } K$, $z \in \bar{K}$, existe un $p \in \mathbb{R}^N$, $p \neq 0$, tal que

$$p \cdot z \leq p \cdot x.$$

1. Definir la sucesión $z_n \rightarrow z$, con $z_n \notin \bar{K}$.
2. Por la primera parte del Teorema, para cada z_n existe un p_n tal que $p_n \cdot z_n < p_n \cdot x$. Los p_n se escogen entre los $\|p_n\| = 1$, que son elementos del conjunto compacto esfera unitaria de $\mathbb{R}^N$.
3. En la esfera existe una subsucesión convergente, cuando $k \rightarrow \infty$, $p_{n_k} \rightarrow p$, con $\|p\| = 1$, para la cual debe cumplirse $p_{n_k} \cdot z_{n_k} < p_{n_k} \cdot x$ para todo $x \in \bar{K}$.
4. Puesto que la función producto interior es continua, cuando $k \rightarrow \infty$, $p_{n_k} \cdot z_{n_k} \rightarrow p \cdot z$. Del mismo modo, cuando $k \rightarrow \infty$, $p_{n_k} \cdot x \rightarrow p \cdot x$. Como $z \in \bar{K}$, puede afirmarse que $p \cdot z \leq p \cdot x$ para todo $x \in \bar{K}$.
5. A pesar de que $z \notin \text{Int } K$, es posible definir una sucesión $x_k \rightarrow z$, cuando $k \rightarrow \infty$, siendo $x_k \in \text{Int } K$. Para este caso, $p_{n_k} \cdot x_k \rightarrow p \cdot z$. Para todo $x \in \text{Int } K$, por lo tanto, $p \cdot z \leq p \cdot x$.

Conclusión: Para todo $x \in K$, por lo tanto, $p \cdot z \leq p \cdot x$.

b. Teorema del hiperplano separador

Una vez probado el teorema del hiperplano acotador, es muy fácil probar el del hiperplano separador. Para ello, hay que demostrar que, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$, convexos y disjuntos, existe un $p \neq 0$ tal que

$$p \cdot x \geq p \cdot y \text{ para todo } x \in A, y \in B.$$

Bastan dos pasos para llevar a cabo dicha demostración:

1. Sea $K = A - B$. Por convexidad de A y B , K es convexo. Por $A \cap B = \emptyset$, $0 \notin K$.
2. Sea $z = (x - y) \in K$. Por el Teorema del Hiperplano Acotador, $p \cdot 0 \leq p \cdot (x - y)$ para todo $x \in K$. Por tanto, $p \cdot x \geq p \cdot y$ para todo $x \in A$, $y \in B$.

10. Resumen

Uno de los conceptos centrales de este Capítulo es el de métrica. A partir de él, pudimos definir bola abierta y sucesión convergente, y utilizando estos conceptos, definir distintos tipos de conjuntos. Para finalizar esta sección, incorporamos un cuadro con seis subconjuntos de R , indicando con una letra S si son de uno de los siete tipos de conjuntos examinados.

	$(0,1)$	$(0,1]$	$[0,1]$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0]$	$(-\infty,+\infty)$
Acotado	S	S	S			
Abierto con respecto a R	S			S		S
Cerrado con respecto a R			S		S	S
Compacto			S			
Secuencialmente Compacto			S			
Conexo	S	S	S	S	S	S
Convexo	S	S	S	S	S	S

II. Conceptos matemáticos básicos: funciones

Introducción

En la teoría del equilibrio general se utilizan funciones para representar objetivos y restricciones de los agentes optimizadores, comportamientos individuales y resultados agregados. En el siguiente Capítulo se presentan algunas de las propiedades más importantes de las funciones utilizadas para construir la teoría, con algunos ejemplos. Tales son la existencia de límites de funciones, la continuidad, homogeneidad, concavidad, convexidad y cuasiconcavidad de funciones, y la existencia de puntos fijos para funciones continuas. Además, se comentan las propiedades de funciones utilizadas para describir sistemas dinámicos discretos, definiéndose los conceptos de puntos periódicos, órbitas periódicas y funciones caóticas, entre otros.

Otras propiedades, como la posibilidad de obtener derivadas e integrales a partir de una función, se suponen conocidas por cursos anteriores de cálculo diferencial e integral.

1. Límites de funciones

Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos, sobre los cuales se define $f : X \rightarrow Y$. Si, a medida que x se aproxima a x^0 (siendo x^0 un punto límite de X que no necesariamente pertenece a X), el valor de la función se aproxima al punto y^0 , se dice que f tiene *límite* y^0 . Ello puede resumirse diciendo que $f(x) \rightarrow y^0$ a medida que $x \rightarrow x^0$, por lo que $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = y^0$. Utilizando los conceptos de distancia en espacios métricos, la afirmación anterior puede escribirse como

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad 0 < d(x, x^0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \rho[f(x), y^0] < \varepsilon.$$

Los conceptos de límite de función y límite de sucesión están relacionados. Probaremos que, si $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = y^0$, a toda sucesión $\{x_n\} \rightarrow x^0$ con $x_n \neq x^0$ corresponde una sucesión $\{f(x_n)\} \rightarrow y^0$. Para ello, definiremos límite utilizando el concepto de bola abierta

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad \rho[f(x), y^0] < \varepsilon \quad \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x^0) \setminus \{x^0\}.$$

Puesto que x^0 es un punto límite de X , siempre puede hallarse una sucesión $\{x_n\} \rightarrow x^0$ con $x_n \neq x^0$. Para cada δ_ε , puede hallarse un $N(\delta_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tan grande que $x_n \in B_{\delta_\varepsilon}(x^0) \setminus \{x^0\}$ para todo $n > N(\delta_\varepsilon)$. Sabemos que la determinación de δ_ε depende del valor dado de ε , por lo que $N(\delta_\varepsilon) \equiv N(\varepsilon)$. Nótese que, a partir de la definición de límite de una función, podemos escribir

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \rho[f(x_n), y^0] < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon),$$

por lo que, si una función f tiene límite, toda sucesión convergente en el dominio de f implica una sucesión convergente en su rango.

Ilustramos el argumento para una función $f : X \rightarrow Y$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$.

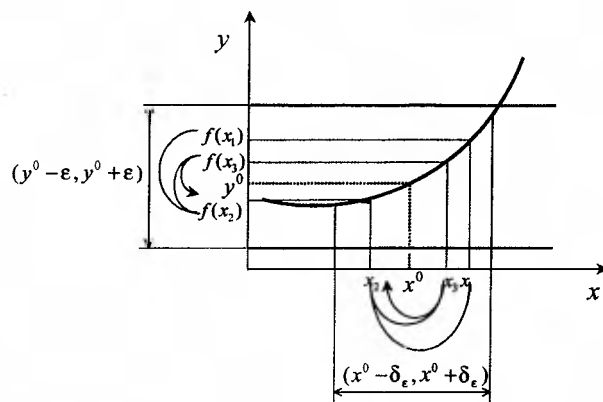


Figura II.1.1

También podemos probar que, si una función f no tiene límite, es posible construir una sucesión convergente en el dominio de f que no implique una sucesión convergente en su rango. Por ello, se afirma que una función f tiene límite y^0 cuando $x \rightarrow x^0$ sí y sólo sí para toda $\{x_n\} \rightarrow x^0$ con $x_n \neq x^0$ se cumple que $\{f(x_n)\} \rightarrow y^0$.

2. Continuidad de funciones

Una función $f : X \rightarrow Y$ es *continua* en $x^0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x^0, \varepsilon) > 0 \text{ tal que } d(x, x^0) < \delta(x^0, \varepsilon) \Rightarrow \rho[f(x), f(x^0)] < \varepsilon.$$

Nótese que una función es continua en $x^0 \in X$ si su límite existe y es igual al valor de la función en x^0 . La función es continua sobre $A \subseteq X$ si es continua en todos los puntos de A .

Utilizando el concepto de bola abierta, puede decirse que f es continua en x^0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in B_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x^0))$$

o, escrito de otro modo, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad f(B_\delta(x^0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x^0)).$$

La afirmación anterior puede ilustrarse con el siguiente gráfico, en el cual $f: X \rightarrow Y$ con $X \subseteq \mathbb{R}^2$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^2$.

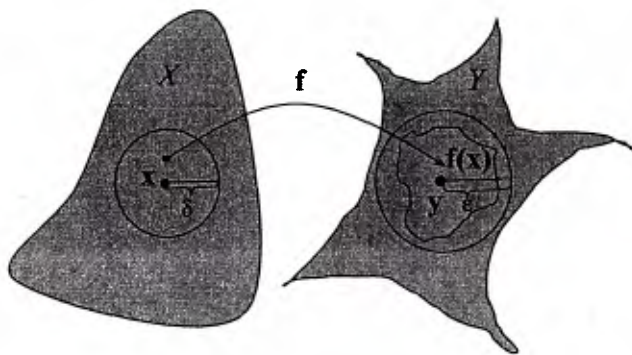


Figura II.2.1

Si el dominio de una función continua $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ es compacto, la función tiene máximo y tiene mínimo en C . Para probar tal afirmación, debe probarse que $f(C) \subset \mathbb{R}$ es compacto. Si $f(C)$ es compacto, entonces es cerrado y acotado, por lo que sus cotas ínfimo y supremo son puntos límite de $f(C)$ que pertenecen al conjunto. Siendo así, existen $x_M, x_m \in C$ tales que $f(x_M) = \sup f(C)$ y $f(x_m) = \inf f(C)$, con lo que se demuestra que la función tiene máximo y tiene mínimo en C .

Para probar que $f(C)$ es compacto, probaremos que es secuencialmente compacto. Para ello, definimos una sucesión arbitraria $\{y_n\}$ en $f(C)$, a partir de la cual obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ en C tal que $f(x_n) = y_n$. Puesto que C es compacto, es secuencialmente compacto: a partir de $\{x_n\}$ puede obtenerse una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ con límite $x \in C$. Por continuidad de f , se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = f(x) \in f(C).$$

Con ello se demuestra que $f(C)$ es secuencialmente compacto y, por lo tanto, compacto.

3. Homogeneidad de funciones

Algunas de las ideas más importantes que se desarrollarán luego requieren comparar los valores de una función $z = z(x)$ cuando se le evalúa en dos puntos de su dominio, x^1 y x^2 . Uno de los casos más interesantes se presenta cuando cada componente del punto $x^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$ es t veces la componente respectiva del punto $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$, esto es, cuando $x^2 = (tx_1^1, \dots, tx_n^1)$.

Por ejemplo, supongamos que el dominio de $z = z(\mathbf{x})$ es R^2 . Si $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ y $t = 2$, deseamos determinar el punto $\mathbf{x}^2$ de modo que cada componente sea el doble de la componente respectiva de $\mathbf{x}^1$, esto es, $\mathbf{x}^2 = (2x_1^1, 2x_2^1)$. Ello puede observarse en el siguiente gráfico, en donde, además, se ha trazado una recta que pasa a través de ambos puntos y del origen.

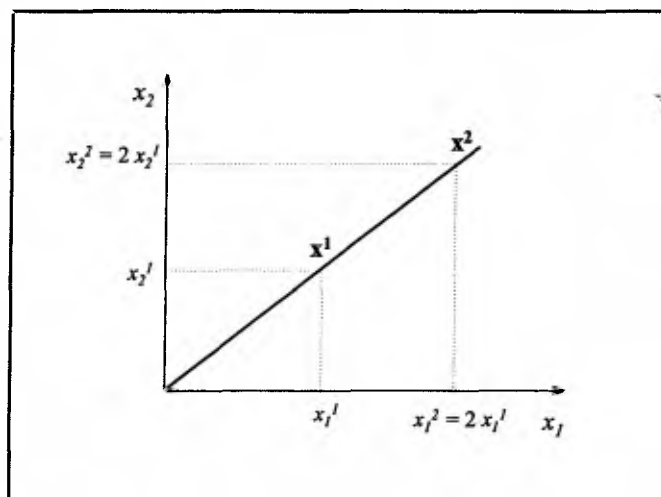


Figura II.3.1

Cualquier punto sobre la recta puede hallarse con el valor apropiado de t , que, para nuestros fines, supondremos un número real mayor que 0. Todos los puntos sobre la recta tienen una característica en común: la relación $\frac{x_2}{x_1}$ es la misma¹, puesto que $\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{tx_2^1}{tx_1^1}$.

Bajo estas condiciones, ¿qué podemos decir si comparamos $z(\mathbf{x}^2)$ y $z(\mathbf{x}^1)$? Lo primero que podemos hacer es establecer si son iguales o si uno es mayor que el otro. Ello puede escribirse de la siguiente forma

$$z(\mathbf{x}^2) = A z(\mathbf{x}^1),$$

de modo que si $A = 1$, $z(\mathbf{x}^2) = z(\mathbf{x}^1)$, si $A > 1$, $z(\mathbf{x}^2) > z(\mathbf{x}^1)$ y si $A < 1$, $z(\mathbf{x}^2) < z(\mathbf{x}^1)$.

Una forma de escribir A como función de t es $A = t^R$, de modo que si $R = 0$, $z(\mathbf{x}^2) = z(\mathbf{x}^1)$, si $R > 0$, $z(\mathbf{x}^2) > z(\mathbf{x}^1)$ y si $R < 0$, $z(\mathbf{x}^2) < z(\mathbf{x}^1)$.

Es posible que R tome valores diferentes para distintos valores de t , x_1^1 y x_2^1 , o, por el contrario, que R sea constante, en cuyo caso le llamaremos r . Si la función z es tal que

¹ Nótese que $\frac{x_2^1}{x_1^1}$ permite hallar la pendiente de la recta sobre la cual se encuentran los otros puntos.

$R = r$, diremos que es homogénea de grado r . Si $r = 1$, se dice que la función homogénea de grado 1, o linealmente homogénea.

De lo dicho debe quedar claro que no todas las funciones son homogéneas, y que no todas las homogéneas lo son linealmente. Una función $z = z(\mathbf{x}) = z(x_1, \dots, x_n)$ es homogénea de grado r si y sólo si, dados los puntos del dominio $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ y $\mathbf{x}^2 = (tx_1^1, \dots, tx_n^1)$, se cumple, con el carácter de identidad, que

$$z(tx_1^1, \dots, tx_n^1) \equiv t^r z(x_1^1, \dots, x_n^1)$$

para todo $t, x_1^1, \dots, x_n^1$. Puesto que el punto $\mathbf{x}^1$ puede ser cualquier punto $\mathbf{x}$ del dominio, la identidad puede escribirse

$$z(tx_1, \dots, tx_n) \equiv t^r z(x_1, \dots, x_n)$$

Si la función $z(\cdot)$ es derivable, varias consecuencias se siguen de la definición anterior. Consideremos a continuación las derivadas parciales a ambos lados de la identidad $z(tx_1^1, \dots, tx_n^1) \equiv t^r z(x_1^1, \dots, x_n^1)$ con respecto a t y a x_i^1 , siendo $i = 1, \dots, n$.

a. *Derivada parcial de ambos lados de la identidad con respecto a t*

Derivando la identidad $z(tx_1^1, \dots, tx_n^1) \equiv t^r z(x_1^1, \dots, x_n^1)$ con respecto a t obtenemos

$$\frac{\partial z(tx_1^1, \dots, tx_n^1)}{\partial tx_1^1} \frac{dtx_1^1}{dt} + \dots + \frac{\partial z(tx_1^1, \dots, tx_n^1)}{\partial tx_n^1} \frac{dtx_n^1}{dt} \equiv r t^{r-1} z(x_1^1, \dots, x_n^1)$$

donde $\frac{dtx_i^1}{dt} = x_i^1$, siendo $i = 1, \dots, n$.

Si ambos lados de la identidad se evalúan en $t = 1$,

$$\frac{\partial z(x_1^1, \dots, x_n^1)}{\partial x_1^1} x_1^1 + \dots + \frac{\partial z(x_1^1, \dots, x_n^1)}{\partial x_n^1} x_n^1 \equiv r z(x_1^1, \dots, x_n^1)$$

obteniéndose con ello dos expresiones diferentes que, evaluadas en el mismo punto $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$, siempre tienen valores iguales. Puesto que el punto $\mathbf{x}^1$ puede ser cualquier punto $\mathbf{x}$ del dominio, la identidad puede escribirse

$$\frac{\partial z(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial z(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} x_n \equiv r z(x_1, \dots, x_n)$$

Esta identidad es resultado del llamado teorema de Euler.

b. Derivada parcial de ambos lados de la identidad con respecto a x_1^1

Derivando la identidad $z(tx_1^1, \dots, tx_n^1) \equiv t^r z(x_1^1, \dots, x_n^1)$ con respecto a x_1^1 obtenemos

$$\frac{\partial z(tx_1^1, \dots, tx_n^1)}{\partial tx_1^1} \frac{dtx_1^1}{dx_1^1} \equiv t^r \frac{\partial z(x_1^1, \dots, x_n^1)}{\partial x_1^1}$$

donde, por ser $\frac{dtx_1^1}{dx_1^1} = t$, se concluye que

$$\frac{\partial z(tx_1^1, \dots, tx_n^1)}{\partial tx_1^1} \equiv t^{r-1} \frac{\partial z(x_1^1, \dots, x_n^1)}{\partial x_1^1},$$

lo que significa que el valor de la derivada de $z(\mathbf{x})$ con respecto a x_1 , evaluada en $\mathbf{x}^2 = (tx_1^1, \dots, tx_n^1)$ es t^{r-1} veces el valor de la misma derivada evaluada en $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$. Como este resultado se obtiene para las demás componentes de $\mathbf{x}^1$, puede afirmarse que las primeras derivadas parciales de una función homogénea de grado r son homogéneas de grado $r-1$.

Puesto que el punto $\mathbf{x}^1$ puede ser cualquier punto $\mathbf{x}$ del dominio, la identidad puede escribirse

$$\frac{\partial z(tx_1, \dots, tx_n)}{\partial tx_1} \equiv t^{r-1} \frac{\partial z(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1}$$

c. Derivadas de la curvas de nivel de una función $z = z(x_1, x_2)$ homogénea de grado r

Como ya se ha explicado, una curva de nivel de la función $z = z(x_1, x_2)$ puede expresarse como la función implícita $z_1 = z[x_1, x_2(x_1)]$, fijando el valor de z en z_1 . La derivada de la función implícita en (x_1, x_2) es

$$\frac{dx_2(x_1, x_2)}{dx_1} = - \frac{\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$$

Sabiendo que

$$\frac{\partial z(tx_1, \dots, tx_n)}{\partial tx_1} \equiv t^{r-1} \frac{\partial z(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1}$$

se verifica

$$\frac{dx_2(tx_1, tx_2)}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial z(tx_1, tx_2)}{\partial tx_1}}{\frac{\partial z(tx_1, tx_2)}{\partial tx_2}} \equiv -\frac{t^{r-1} \frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{t^{r-1} \frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2}} \equiv -\frac{\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = \frac{dx_2(x_1, x_2)}{dx_1}$$

lo que significa que las derivadas de las curvas de nivel de una función homogénea de grado r tienen el mismo valor al evaluarlas en los puntos x para los cuales la relación $\frac{x_2}{x_1}$ sea la misma. Esto puede ilustrarse con el siguiente gráfico, en la cual dichos puntos (por ejemplo x^1 y x^2) se dibujan sobre una recta (frecuentemente llamada rayo vector) que parte del origen.

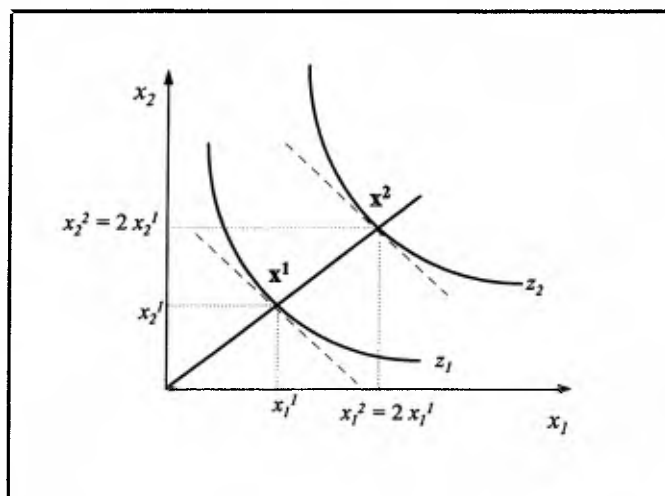


Figura II.3.2

Nótese que, en los puntos x^1 y x^2 , las curvas de nivel z_1 y z_2 son tangentes a rectas (punteadas en la figura) que tienen la misma pendiente.

4. Concavidad y Cuasiconcavidad de Funciones

Una función puede ser continua o no, estrictamente creciente o no, homogénea de grado uno o no, diferenciable dos veces o no. Es decir, una función puede ser clasificada de acuerdo a si tiene o no una propiedad particular, que, por ser útil a determinados fines, permite utilizar o no dicha función en estudios específicos. Una de esas propiedades es la *concavidad*: una función puede ser cóncava, convexa, estrictamente cóncava, estrictamente convexa, o ninguna de las anteriores. Conocer la concavidad de las funciones permite, entre otras cosas, identificar los casos en los cuales corresponde un máximo o un mínimo a un punto crítico en un problema de optimización, sin evaluar los signos de los hessianos pertinentes. Otra propiedad, más débil que la concavidad, es la *cuasiconcavidad*: una función puede ser cuasicóncava, estrictamente cuasicóncava, o ninguna de las anteriores. En

otros contextos, interesa saber si las funciones satisfacen las definiciones de pseudoconcavidad, estricta pseudoconcavidad, cuasiconvexidad, estricta cuasiconvexidad o semi-estricta cuasiconvexidad.

Conocer la cuasiconcavidad de las funciones permite, entre otras cosas, identificar los casos para los cuales un punto crítico en un problema de optimización restringida es un máximo o un mínimo sin evaluar el signo del hessiano orlado pertinente.

A continuación, se presentan las definiciones de concavidad, convexidad y cuasiconcavidad de funciones. En estos temas, Baumol (1986) es muy recomendable.

a. Concavidad y convexidad de funciones

Las funciones que estudiaremos a continuación son campos escalares, esto es, funciones reales de variables vectoriales. Tales funciones tienen por dominio un subconjunto del espacio euclídeo N -dimensional R^N , y por rango un subconjunto del espacio 1-dimensional R , pudiendo escribirse como

$$z = z(x)$$

donde $x \in R^N$ y $z \in R$. Supondremos además que el dominio de la función es un conjunto convexo, esto es, que la combinación convexa de dos puntos cualesquiera del dominio pertenece al dominio.

Para determinar si una función es cóncava, convexa, estrictamente cóncava, estrictamente convexa o ninguna de las anteriores deben compararse el valor de la función (o imagen) para una combinación convexa de dos puntos del dominio con la combinación convexa de los valores de la función (o imágenes) para dichos puntos del dominio, usando para ambas combinaciones convexas el mismo valor arbitrario a . Para hacerlo se usará la siguiente notación:

X	= dominio convexo de z
$x^1, x^2 \in X$	= dos puntos del dominio X
$x^3 = a x^1 + (1-a) x^2, \quad a \in [0,1]$	= combinación convexa de dos puntos del dominio X
$z(x^3) = z(a x^1 + (1-a) x^2)$	= valor de la función para una combinación convexa de dos puntos del dominio X
$z(x^1), z(x^2)$	= valores de la función para dos puntos del dominio X
$a z(x^1) + (1-a) z(x^2)$	= combinación convexa de los valores de la función para dos puntos del dominio X

La comparación consiste en determinar si es posible afirmar para cualquier par $x^1, x^2 \in X$ que $z(x^3)$ es mayor, menor o igual a $az(x^1) + (1-a)z(x^2)$. Ambas expresiones son funciones cuyos valores son números reales, por ser z un campo escalar y $a \in R$.

La función z es

- *estrictamente convexa* si, con $a \in (0,1)$ y $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, $z(\mathbf{x}^3) < a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$
- *convexa* si, con $a \in [0,1]$, $z(\mathbf{x}^3) \leq a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$
- *estrictamente cóncava* si, con $a \in (0,1)$ y $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, $z(\mathbf{x}^3) > a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$
- *cóncava* si, con $a \in [0,1]$, $z(\mathbf{x}^3) \geq a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$

Para determinar la concavidad de la función z debe, por tanto, conocerse su relación con una función lineal definida a partir de dos valores de z .

Notas:

1. No deben confundirse *función* convexa y *conjunto* convexo. Recordemos que una función no es un conjunto, sino una *relación* entre los elementos de dos conjuntos, tal que a cada uno de los elementos del dominio corresponda uno y sólo uno de los elementos del rango.
2. A partir de la función $z = z(\mathbf{x})$ pueden definirse dos conjuntos: el epigrafo, G_z , y el hipografo, H_z . Tales conjuntos son

$$G_z = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in X, y \in \mathbb{R}, z(\mathbf{x}) \leq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$H_z = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in X, y \in \mathbb{R}, z(\mathbf{x}) \geq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

es decir, G_z es el conjunto de puntos que contienen las n coordenadas de los puntos del dominio y los números reales mayores o iguales al valor de la función y H_z es el conjunto de puntos que contienen las n coordenadas de los puntos del dominio y los números reales menores o iguales al valor de la función. Si G_z es un conjunto convexo, la función z es convexa. Si H_z es un conjunto convexo, la función z es cóncava.

3. Una función estrictamente cóncava (convexa) es cóncava (convexa), pero lo contrario no es cierto. En representaciones bidimensionales y tridimensionales se observa que las funciones cóncavas (convexas) tienen partes “planas” y, en algunos casos, “curvas”, mientras que las estrictamente cóncavas (convexas) sólo son “curvas”. Las partes “planas” son “trozos” lineales de la función z . Cuando hay más de tres dimensiones, dichos trozos no pueden representarse, pero en algunos casos pueden identificarse.
4. Una función es cóncava y convexa si $z(\mathbf{x}^3) = a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$. Ello ocurre con las funciones lineales.
5. Una función para la cual $z(\mathbf{x}^3) < a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$ para algunos puntos del dominio y $z(\mathbf{x}^3) > a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$ para otros no es ni cóncava ni convexa.

6. Cuando la función es estrictamente cóncava (convexa), $a \in (0,1)$, en tanto que cuando es cóncava (convexa), $a \in [0,1]$. Observemos que, si el primer intervalo también fuera cerrado, sería imposible que para $a = 0$ (o $a = 1$) fueran estrictamente desiguales $z(x^3)$ y $az(x^1) + (1-a)z(x^2)$. Incluir 0 y 1 en el primer intervalo haría imposible distinguir las funciones cóncavas (convexas) de las estrictamente cóncavas (convexas). Por la misma razón, la restricción $x^1 \neq x^2$ sólo se añade al definir estricta concavidad (convexidad).
7. Si una función es estrictamente cóncava (convexa) y, resolviendo un problema de optimización, la condición de primer orden indica la existencia de un punto crítico, este punto es un máximo global (mínimo), y es único. Por supuesto, si la función es monótonamente creciente o decreciente, no se hallará punto crítico y no habrá ni máximo ni mínimo, aunque la función sea estrictamente cóncava o convexa.

A continuación, presentamos dos ejemplos gráficos. En el primero, se presenta una función estrictamente convexa, con dominio en $\mathbb{R}$, y en el segundo una función estrictamente cóncava, con dominio en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1. Si $x \in \mathbb{R}$, la función $az(x^1) + (1-a)z(x^2)$ puede representarse con una línea recta en el espacio 2-dimensional (x, z) . Para probarlo basta probar que la pendiente y la ordenada en el origen de una recta que contenga los puntos $(x^1, z(x^1))$ y $(x^2, z(x^2))$ son las mismas para una recta que contenga los puntos $(x^1, z(x^1))$ y $(x^3, az(x^1) + (1-a)z(x^2))$, sin importar el valor de a . En el gráfico adjunto se identifican los puntos del dominio con x , en lugar de con x , por ser el dominio un conjunto de escalares.

En este caso, puesto que la función se encuentra *por debajo* de la línea recta definida para dos puntos *arbitrarios* del dominio en *todas* sus posibles combinaciones convexas, se cumple que $z(x^3) < az(x^1) + (1-a)z(x^2)$ y, por tanto, la función es estrictamente convexa. Obsérvese que el epígrafo $G_z \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto convexo.

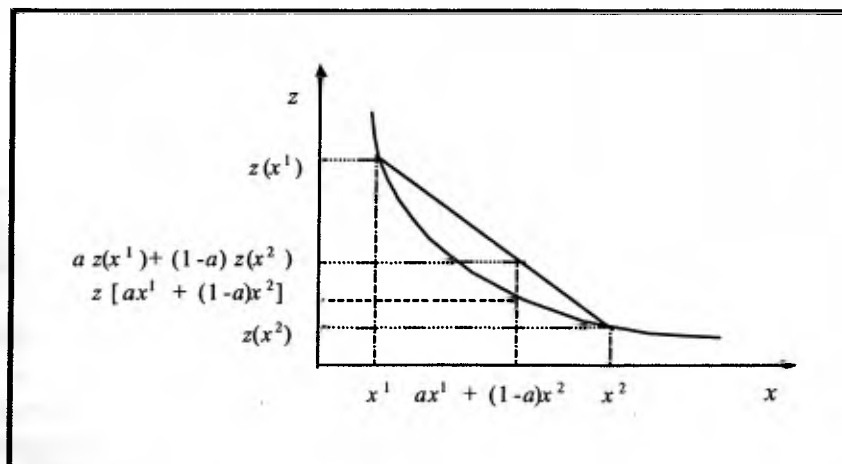


Figura II.4.1

Ejemplo 2. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, la función $a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$ puede representarse con un plano en el espacio 3-dimensional $(\mathbf{x}, z)$. En el gráfico adjunto se observa que la función se encuentra *por encima* de la línea recta definida para dos puntos *arbitrarios* del dominio en *todas* sus posibles combinaciones convexas, cumpliéndose que $z(\mathbf{x}^3) > a z(\mathbf{x}^1) + (1-a) z(\mathbf{x}^2)$ y, por tanto, siendo la función estrictamente cóncava. Obsérvese que el hipografo $H_z \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto convexo.

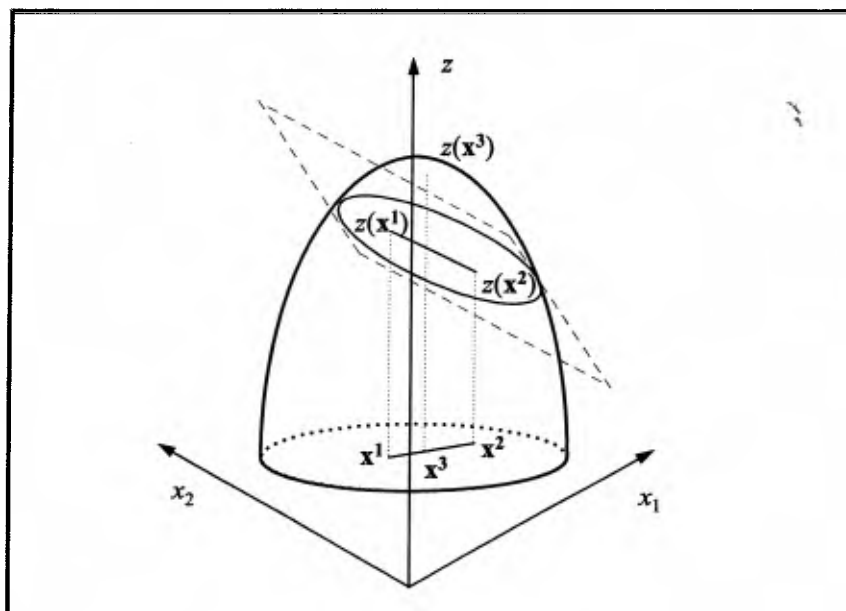


Figura II.4.2

b. Cuasiconcavidad de funciones

Para definir la propiedad de cuasiconcavidad de una función esta también debe ser un campo escalar con dominio convexo.

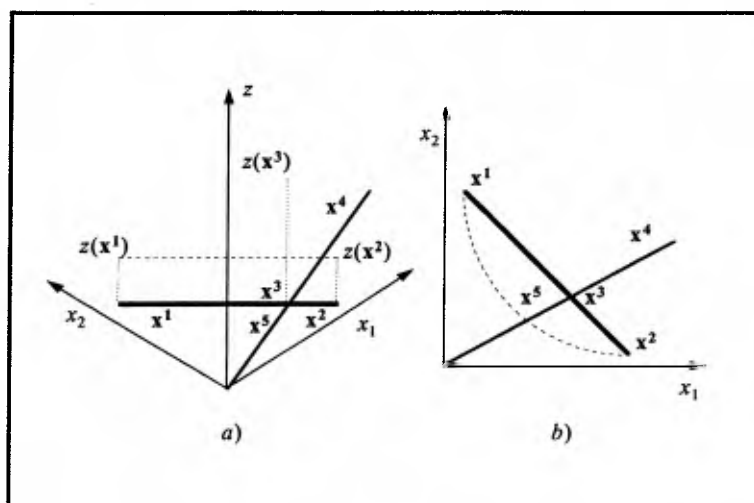
La función z es

- *estrictamente cuasicóncava* si, con $a \in (0,1)$ y $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, $z(\mathbf{x}^3) > \min\{z(\mathbf{x}^1), z(\mathbf{x}^2)\}$
- *cuasicóncava* si, con $a \in [0,1]$, $z(\mathbf{x}^3) \geq \min\{z(\mathbf{x}^1), z(\mathbf{x}^2)\}$

En este caso no se compara la función z con otra función, como al estudiar la concavidad: se compara el valor de la función z evaluada en la combinación convexa de $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$, con el menor de los valores de la misma función z evaluada en $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$. Si el valor de $z(\mathbf{x}^3)$ es estrictamente mayor al menor de los valores entre $z(\mathbf{x}^1)$ y $z(\mathbf{x}^2)$, la función es estrictamente cuasicóncava. Si para algunos puntos del dominio $z(\mathbf{x}^3)$ es estrictamente mayor y para otros es igual al menor de los valores entre $z(\mathbf{x}^1)$ y $z(\mathbf{x}^2)$, la función es cuasicóncava. En cualquier otro caso no es ni una ni otra cosa.

Notas:

1. Las curvas de nivel de una función continua, definida de $\mathbb{R}_+^2$ a $\mathbb{R}_+$, estrictamente creciente² y estrictamente cuasicóncava son estrictamente convexas. A continuación se presenta una demostración gráfica. Los dos gráficos anexos muestran los puntos del dominio en el espacio (x_1, x_2) , identificados como $x^1, \dots, x^5$. La línea recta que parte del origen muestra en ambos gráficos puntos del dominio, *no* valores de la función. En el gráfico a) se muestran los valores de la función para x^1, x^2 y x^3 , identificados como $z(x^1)$, $z(x^2)$ y $z(x^3)$.

**Figura II.4.3**

- Se escogen dos puntos distintos en el dominio de la función, tales que sus imágenes sean iguales (estén al mismo nivel). Sean dichos puntos $x^1 \neq x^2$ con $z(x^1) = z(x^2)$.
- Se encuentra el segmento de combinaciones convexas de x^1 y x^2 , de las cuales se elige arbitrariamente x^3 .
- Si la función es estrictamente cuasicóncava, $z(x^3) > z(x^1) = z(x^2)$. Por lo tanto, ningún punto de la combinación convexa puede pertenecer a la misma curva de nivel de $z(x^2)$.
- Si la función es estrictamente creciente, todos los puntos del dominio que se encuentran sobre la línea recta que pasa por los puntos 0 y x^3 se tendrán imágenes mayores mientras más distantes se encuentren de 0 . Si $x_1^4 > x_1^3$ y $x_2^4 > x_2^3$ se cumple que $z(x^4) > z(x^3)$. Sabiendo que $z(x^3) > z(x^1)$, se sabe que ningún punto sobre la recta a la derecha de x^3 puede pertenecer a la misma curva de nivel de $z(x^2)$. Entre los puntos 0 y x^3 se encuentra un único punto, que llamamos x^5 , tal que $z(x^5) = z(x^2)$. Es único porque sobre la recta las componentes de cualquier otro punto son mayores o menores que las de x^5 , de modo que sus imágenes son mayores o menores que $z(x^5)$.

² Una función estrictamente creciente es una función para la cual si $x^1 \geq x^2$ y $x^1 \neq x^2$, entonces $z(x^1) > z(x^2)$. Téngase en cuenta que si $x \in \mathbb{R}^n$, $x^1 \geq x^2$ implica $x_1^1 \geq x_1^2, \dots, x_n^1 \geq x_n^2$. Si $x \in \mathbb{R}$, $x^1 \geq x^2$ se escribe $x^1 > x^2$.

- e) Puesto que la ubicación de $\mathbf{x}^5$ se hizo a partir de la elección *arbitraria* de una combinación convexa de $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$, el resultado es válido para *cualquier* combinación convexa de $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$, de modo que la línea que uniría el conjunto de $\mathbf{x}$ cuya imagen es igual $z(\mathbf{x}^2)$ sería una curva de nivel ubicada bajo la recta que une $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$. Puede verificarse que una curva como esta representa una función estrictamente convexa.
- f) Puesto que $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ se eligieron en el dominio *arbitrariamente* de modo que $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ con $z(\mathbf{x}^1) = z(\mathbf{x}^2)$, el resultado es válido para *cualquier* par de puntos que cumpla las condiciones indicadas. Ello permite afirmar que el dominio de la función puede ordenarse usando un mapa de curvas de nivel estrictamente convexas, asociadas a mayores valores de la función a medida que más lejos se encuentran las curvas del 0.
2. Si en un problema de maximización restringida la función objetivo es estrictamente cuasiconcava y estrictamente creciente y la función restricción es lineal, el punto crítico indicado por la condición de primer orden es un máximo único. Si se escogen dos puntos del dominio sobre la restricción, $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, con $z(\mathbf{x}^1) = z(\mathbf{x}^2)$, todas sus combinaciones convexas se encuentran sobre la restricción. Sea $\mathbf{x}^3$ una combinación convexa cualquiera. Por la definición de estricta cuasiconcavidad $z(\mathbf{x}^3) > z(\mathbf{x}^2)$, lo que implica que ni $\mathbf{x}^1$ ni $\mathbf{x}^2$ pueden ser soluciones del problema de maximización. Por esto se afirma que, si hay solución, es única. Del mismo modo, si en un problema de minimización restringida la función objetivo es lineal y la función restringida es estrictamente cuasiconcava y estrictamente creciente, el punto crítico indicado por la condición de primer orden es un mínimo único. Para comprender lo afirmado, puede ayudar el siguiente gráfico.

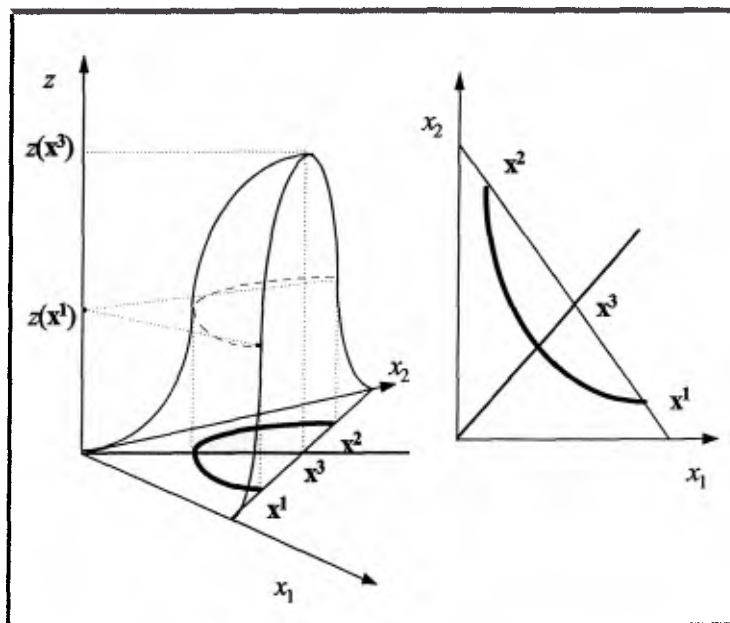


Figura II.4.4

3. Si una función es estrictamente cuasiconcava, una transformación monótona creciente de la misma también es estrictamente cuasiconcava.

4. En las definiciones de función estrictamente cuasicóncava y cuasicóncava es posible que $z(\mathbf{x}^1) = z(\mathbf{x}^2)$.³ Cuando la función es cuasicóncava, esta igualdad puede implicar la existencia de partes “planas horizontales” en las representaciones gráficas en espacios bidimensionales y tridimensionales. Para las funciones definidas de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, ello puede significar tramos en los cuales las curvas de nivel son “planas” o son “gruesas”, casos que se ilustran a continuación.

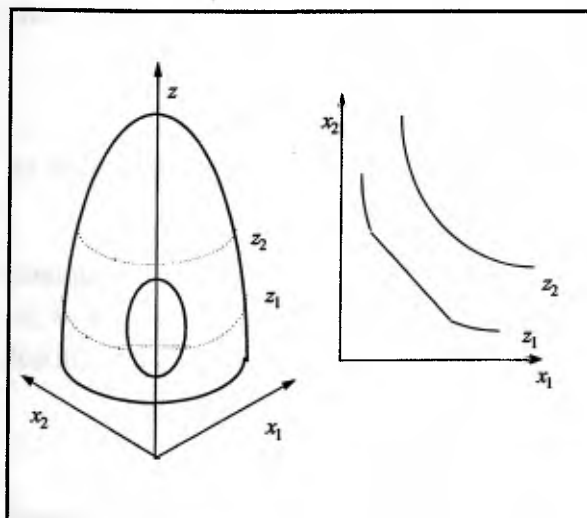


Figura II.4.5

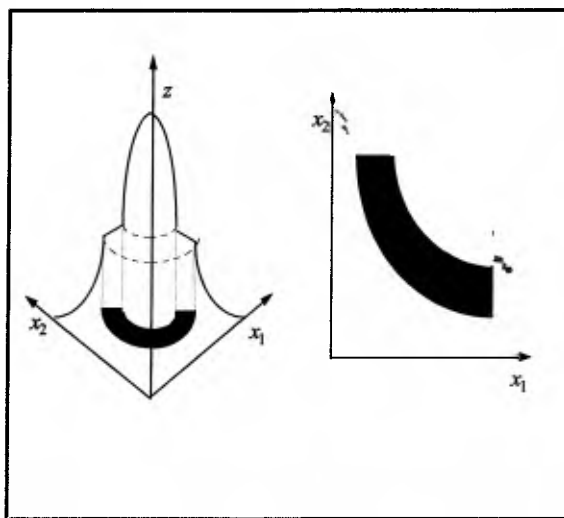


Figura II.4.6

5. Funciones con puntos fijos

Una función $f: X \rightarrow X$, definida de un espacio métrico en sí mismo, suele llamarse *operador*, y denotarse T . Se dice que f tiene un *punto fijo* $x^* \in X$ si $f(x^*) = x^*$. Consideraremos dos teoremas de punto fijo en este trabajo: el teorema del punto fijo para contracciones [ver Apostol (1982) y Fuente, (1999)] y el teorema del punto fijo de Brouwer [ver Border (1985) y Starr (1997)].

a. Teorema del punto fijo para contracciones

Una función f es una *contracción* de X con módulo β si para algún $\beta \in (0,1)$ se cumple que

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y) .$$

³Para las funciones en las que ello no es posible, tales que para $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ entonces $z(\mathbf{x}^1) \neq z(\mathbf{x}^2)$, y se cumpla que $z(\mathbf{x}^3) > \min\{z(\mathbf{x}^1), z(\mathbf{x}^2)\}$, con $a \in (0,1)$, algunos autores reservan el nombre de *funciones semi-estrictamente cuasicóncavas*.

Puede probarse que una contracción es una función continua a partir de su definición. Dado un ε , puede elegirse un $\delta \leq \frac{\varepsilon}{\beta}$. Con él, puede escribirse

$$d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y) < \beta \delta \leq \varepsilon$$

que implica que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{para todo } d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

es decir, que una contracción es continua.

Probaremos que una contracción tiene un único punto fijo, al cual converge cualquier sucesión definida aplicando la contracción repetidamente a partir de cualquier $x_0 \in X$. Para ello, comenzamos por definir la sucesión $\{x_n(x_0)\}$ a partir de un $x_0 \in X$, formada por

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \dots$$

Puesto que $0 < \beta < 1$, la distancia entre dos elementos sucesivos de $\{x_n(x_0)\}$ es acotada y decreciente en n :

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \beta d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \beta d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \beta^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \dots \leq \beta^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Haciendo uso de este resultado y de la desigualdad triangular, se sigue que, con $m < n$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \beta^i d(x_1, x_0) = \beta^m d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{n-m-1} \beta^i \\ &\leq \beta^m d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \leq \frac{\beta^m}{1-\beta} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Es posible obtener $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todos los elementos de una sucesión con subíndices superiores a m y n , si se escogen valores suficientemente grandes de m y n .

Téngase en cuenta que $\frac{\beta^m}{1-\beta} \rightarrow 0$ a medida que $m \rightarrow \infty$. Con ello se demuestra que

$\{x_n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy. Si (X, d) es un espacio completo, el límite de la sucesión pertenece a X , lo que escribimos $x^* \in X$.

El límite de la sucesión es un punto fijo de f , como se sigue de su continuidad. Obsérvese que

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$$

Una contracción tiene un único punto fijo. Ello puede probarse suponiendo que tiene dos puntos fijos, x' y x'' . En este caso $d(x', x'') \leq \beta d(x', x'')$, lo que sólo puede cumplirse con $d(x', x'') = \beta d(x', x'') = 0$, por lo que $x' = x''$.

Podemos ilustrar los conceptos expuestos utilizando una función $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, donde $[a, b] \in \mathbb{R}$. Si su pendiente es siempre positiva y menor o igual a un $\beta \leq 1$, es decir, si $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \beta < 1$, f es una contracción. Colocamos los elementos del dominio en el eje de abscisas, y los del rango en el de ordenadas. Como hemos indicado, dado un $x_0 \in X$, podemos hallar una sucesión $\{x_n(x_0)\}$ formada por

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \dots$$

Podemos utilizar la línea de 45° para colocar el valor de una imagen $f(x_n)$ en el conjunto dominio, como x_{n+1} . Donde la gráfica de la función corta la línea de 45° , es decir, donde $f(x^*) = x^*$, se identifica el punto fijo $x^* \in X$. Obsérvese en la siguiente gráfica que, sin importar si comenzamos en x_0 o en x'_0 , las sucesiones $\{x_n(x_0)\}$ o $\{x_n(x'_0)\}$ convergen a x^* .

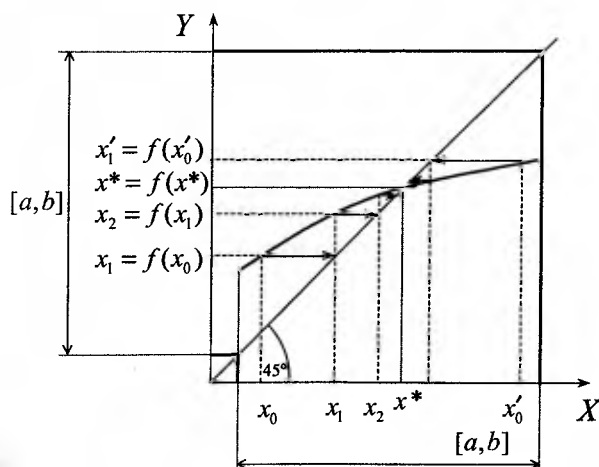


Figura II.5.1

b. Teorema del punto fijo de Brouwer

Nash (1950) utilizó el teorema de Brouwer para probar la existencia de al menos un equilibrio en un juego bien definido. Arrow y Debreu (1952) utilizaron el mismo argumento para probar la existencia del equilibrio general en una economía con producción. En esta sección se presenta una prueba del teorema del punto fijo de Brouwer sobre un simplex (el conjunto convexo y compacto más simple), para la cual deben probarse inicialmente el lema de Sperner y el teorema Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (KKM).

b.1. El conjunto simplex: conceptos básicos

Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N+1} \in \mathbb{R}^N$, tales que N de ellos son linealmente independientes. Llamaremos N -simplex sobre $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N+1}$ al conjunto $S \subset \mathbb{R}^N$ definido como

$$S \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \mathbf{x}_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

Como puede observarse, un N -simplex es el conjunto de las combinaciones convexas de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N+1}$. Estos puntos son llamados vértices del N -simplex, y los números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N+1}$ son llamados coordenadas baricéntricas de $\mathbf{x}$. A cada punto $\mathbf{x}$ corresponde un conjunto de cargadores, cuyos elementos son aquellos vértices de S acompañados por coordenadas baricéntricas positivas en la combinación convexa que define a $\mathbf{x}$.

Todo N -simplex tiene $N+1$ caras. Una cara es un conjunto $F \subset \mathbb{R}^N$ definido como

$$F \equiv \left\{ \mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \mathbf{x}_i, \lambda_k = 0 \text{ para un } k, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

Puesto que F es un conjunto de combinaciones convexas, como S , también es un simplex. Como, por definición, cada uno de sus elementos puede tener un máximo de N cargadores, tomados de los $N+1$ vértices de S , se afirma que cada F es un $(N-1)$ -simplex.

Podemos representar gráficamente un 1-simplex, un 2-simplex y un 3-simplex. Para ello, daremos a cada vértice una etiqueta, que será el subíndice que acompaña al punto. Así, por ejemplo, llamaremos vértice 1 al punto $\mathbf{x}_1$. Note que los simplex dibujados son, como todos los N -simplex, conjuntos compactos, conexos y convexos.

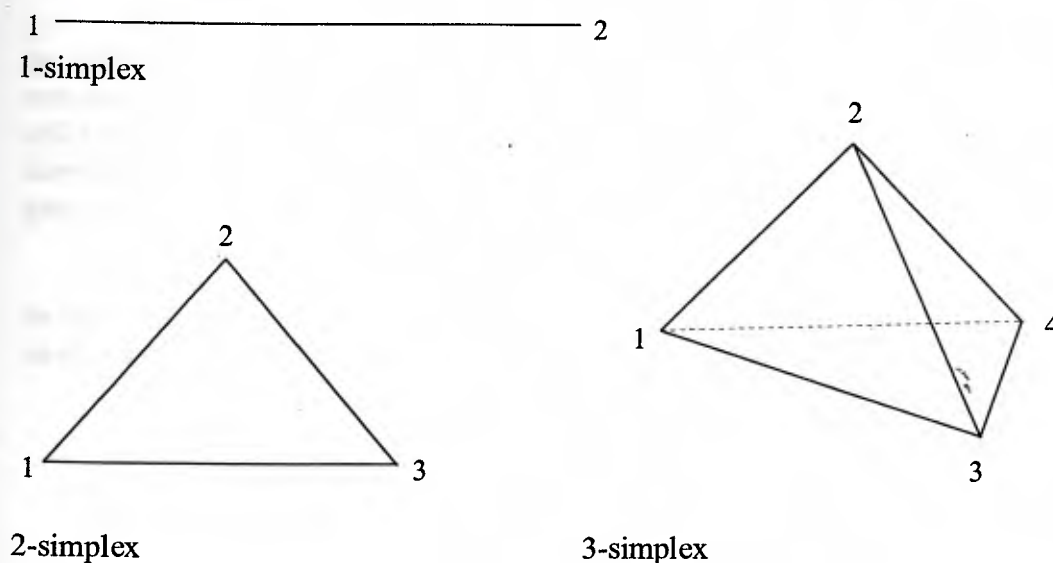


Figura II.5.2

Observemos el 2-simplex. Los puntos interiores del conjunto tienen como cargadores a los tres vértices. Cada lado del triángulo (excepto los vértices) es un conjunto de puntos cargados por los dos vértices que definen cada lado. Cada vértice es cargado por sí mismo. El 2-simplex tiene tres caras, siendo cada una uno de los lados del triángulo dibujado (incluidos los vértices correspondientes). Puesto que cada lado es un segmento de una línea recta, tiene la forma del 1-simplex representado en la Fig. 1.1. Además, nótese que el 2-simplex de la Fig. 1.2, tiene la forma correspondiente a una de las cuatro caras del 3-simplex de la Fig. 1.3., representado como una pirámide de base triangular. Como puedes deducir, aun cuando no puedas imaginar, el 3-simplex representado es una de las cinco caras de un 4-simplex.

A partir de un N -simplex, que llamaremos principal, podemos obtener un conjunto finito de N -subsimpléx que llamaremos subdivisión simplicial, $\{S_i\}$. Los N -subsimpléx de $\{S_i\}$ deben satisfacer tres condiciones: su unión es el N -simplex principal, sus interiores son disjuntos, y todo punto que pertenezca a varios N -subsimpléx y sea vértice de uno, debe ser vértice de todos. Cada vértice de un N -subsimpléx debe identificarse colocándole como etiqueta la etiqueta de uno de los vértices del principal que le cargan. Así, por ejemplo, si x_1 y x_2 son cargadores de $x \in S \subset \mathbb{R}^N$, y x es uno de los vértices de algún N -subsimpléx, es inadmisibles que se le asigne una etiqueta distinta de 1 o 2.

b.2. Lema de Sperner

Toda subdivisión simplicial contendrá un número impar de N -subsimpléx cuyos $N+1$ vértices pueden recibir admisiblemente las $N+1$ etiquetas diferentes del N -simplex principal. Ello implica que al menos un N -subsimpléx puede recibir el juego completo de etiquetas.

Probaremos esta afirmación por inducción matemática: primero verificaremos que es cierta para un 1-simplex, y luego que también se cumple para un N -simplex, si suponemos que se cumple para un $(N-1)$ -simplex. Intentaremos facilitar la exposición utilizando ilustraciones para dos simplex particulares, cada uno con una subdivisión simplicial asociada. A pesar del ejemplo, debe recordarse que la prueba es completamente general.

Observa el siguiente 1-simplex. Sobre él hemos definido una subdivisión simplicial de cinco elementos. Verifica que hay tres 1-subsimplex con el juego completo de etiquetas en el caso representado.

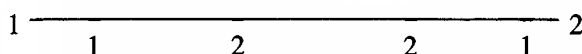


Figura II.5.3

La clave para la prueba es muy sencilla, y la presentaremos con una pregunta sencilla: ¿cuántas veces aparece el número 1 como etiqueta en un 1-subsimplex que tiene el juego completo de etiquetas? Si entiendes que aparece sólo una vez, podemos continuar, puesto que tendrás claro que el número de veces que el 1 aparece una vez es el número de 1-subsimplex con el juego completo de etiquetas. Es este número el que queremos saber si es par o impar.

Continuemos por medio de preguntas y respuestas:

1. ¿Cuántas veces aparece el número 1 como etiqueta en un 1-subsimplex que tiene el juego completo de etiquetas? Aparece una vez, por lo que, si hay b de tales 1-subsimplex, el 1 aparece b veces.
2. ¿Cuántas veces aparece el número 1 como etiqueta en un 1-subsimplex que no tiene el juego completo de etiquetas? Aparece dos veces, o ninguna. Por lo que, si hay a 1-subsimplex en los que el 1 aparece, debe aparecer $2a$ veces.
3. ¿Cuántos vértices identifica la etiqueta 1 cuando se coloca sobre un punto interior del 1-simplex principal? Sabemos que identifica dos vértices, porque tal punto debe pertenecer a dos 1-subsimplex consecutivos. Por tanto, si la etiqueta 1 aparece sobre c puntos interiores, se está usando $2c$ veces.
4. ¿Cuántos vértices identifica la etiqueta 1 cuando se coloca sobre uno de los vértices del 1-simplex principal? Sabemos que sobre el 1-simplex principal no se repiten las etiquetas. Por tanto, la etiqueta 1 aparece sólo una vez.

Observa la siguiente ecuación

$$2a + b = 2c + 1,$$

Hemos contado de dos modos diferentes el número de veces que se ha usado 1 como etiqueta (podimos hacerlo con el número 2 con resultados similares). El lado derecho de la ecuación es necesariamente impar. Para que el lado izquierdo sea impar, es indispensable

que b sea impar. Puesto que es posible que $a = 0$, debe existir al menos un 1-subsimplex con el juego completo de etiquetas.

Continuaremos de un modo similar para probar el Lema de Sperner en un 2-simplex. Para ello, ilustraremos el procedimiento con la siguiente figura

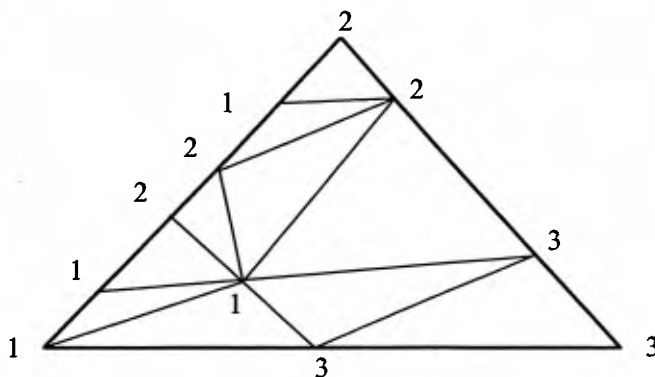


Figura II.5.4

Consideremos la siguiente pregunta, muy relacionada con una anterior: ¿es posible que alguna etiqueta se repita al identificar los vértices de un N -subsimplex que tenga el juego completo de etiquetas? Puesto que no es posible, sabemos que no es posible que dos caras de tal N -subsimplex tengan sus N vértices con etiquetas iguales. Tomando un 2-subsimplex como ejemplo, verifica que sus tres caras tendrán como vértices puntos con las etiquetas 1 y 2, 2 y 3 y 1 y 3.

Si un N -subsimplex no tiene el juego completo de etiquetas, necesariamente una, algunas o todas las etiquetas deben repetirse. Nos interesaremos en un caso particular: las etiquetas 1, 2, ..., N se usan para identificar los $N+1$ vértices de N -subsimplex. Por lo que debe repetirse una etiqueta. Tomando un 2-subsimplex como ejemplo, verifica que dos de sus tres caras tendrán como vértices puntos con las etiquetas 1 y 2. La otra tendrá como vértices puntos con las etiquetas 2 y 2 ó 1 y 1, según cuál sea la etiqueta que se repita. En general, si se utilizan las primeras N etiquetas para identificar los $N+1$ vértices de un N -subsimplex, exactamente dos caras tendrán las N etiquetas sin repetición para cada uno de sus N vértices.

Para probar el Lema para un 1-simplex, contamos cuántas veces se utilizó el 1 como etiqueta. Ahora, que nos interesa probarlo para un N -simplex, vamos a contar las caras de los N -subsimplex cuyos N vértices reciben las etiquetas 1, ..., N . Debemos recordar que dichas caras son $(N-1)$ subsimplex, por lo que recibir las etiquetas 1, ..., N implica recibir el juego completo de etiquetas. Además, para usar inducción matemática, suponemos que el Lema se cumple sobre ellos.

Procederemos utilizando preguntas y respuestas, como al principio:

1. ¿Cuántas caras tienen el juego completo de etiquetas en un N -subsimplex que tiene un juego completo de etiquetas? Exactamente una, por lo que, si hay b de estos, hay b de aquellas.
2. ¿Cuántas caras tienen el juego completo de etiquetas en un N -subsimplex que tiene las etiquetas $1, \dots, N$, sin $N+1$? Exactamente dos, por lo que, si hay a de estos, hay $2a$ de aquellas.
3. ¿Cuántas veces aparecen las caras que tienen el juego completo de etiquetas en un N -subsimplex, si sus puntos son puntos interiores del N -simplex principal? Exactamente dos, porque son caras de dos N -subsimplex colaterales. Cada una de las "caras" corresponde a dos N -subsimplex, una cara para cada uno, por lo que si hay c de estos aquellas, hay $2c$ de estas.
4. ¿Cuántas veces aparecen las caras que tienen el juego completo de etiquetas en un N -subsimplex, si sus puntos no son puntos interiores del N -simplex principal? Exactamente una, porque son caras que corresponden sólo a la subdivisión simplicial de la cara correspondiente del N -simplex principal. Por tanto, si hay d N -subsimplex en esta subdivisión simplicial, que tengan el juego completo de etiquetas, tendremos d caras con tal característica.

Así, se cumple que

$$2a + b = 2c + d$$

Hemos supuesto que el Lema se satisface para $(N-1)$ subsimplex, por lo que d debe ser impar. En consecuencia, b debe ser impar, y se prueba el Lema.

b.3. Teorema Knaster-Kuratowski-Mazurkeiwicz (KKM)

Sean $C_1, C_2, \dots, C_{N+1} \subset S$ conjuntos cerrados tales que $x_i \in C_i$. Los elementos de C_i deben tener a x_i entre sus cargadores. Entonces

$$\bigcap_{i=1}^{N+1} C_i \neq \emptyset$$

Para probar esta afirmación se utiliza una sucesión de subdivisiones simpliciales, tales que toda subdivisión implica N -subsimplex más pequeños que la anterior. Por el Lema de Sperner sabemos que en toda subdivisión existe al menos un N -subsimplex con el juego de etiquetas completo. Por tanto, dentro de todo N -subsimplex con el juego de etiquetas completo podremos encontrar otro también con el juego completo de etiquetas. A continuación presentamos, a manera de ejemplo, algunos de los 2-subsimplex que cumplen con esta condición en las primeras tres subdivisiones simpliciales de S (obsérvese que no se representan todos los 2-subsimplex de cada subdivisión).

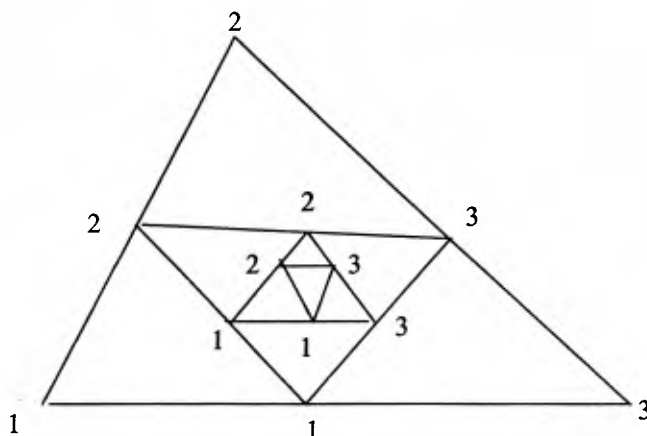


Figura II.5.5

Puedes notar que, cada 2-subsimplex se encuentra dentro de otro. Si buscas subdivisiones simpliciales cada vez más finas, los vértices tenderán a acercarse cada vez más. Puesto que deben acercarse al mismo punto, puede decirse que cada uno de los tres grupos de vértices (los llamados 1, los llamados 2 y los llamados 3) forman parte de tres sucesiones convergentes, respectivamente, y que convergen al mismo punto. Puesto que cada grupo de vértices es un elemento de C_1 , C_2 ó C_3 , y tales conjuntos son cerrados, el límite de las tres sucesiones debe pertenecer a los tres conjuntos. El argumento es similar para N -simplex.

b.4. Teorema del punto fijo de Brouwer

Sea una función continua $f: S \rightarrow S$. Existe al menos un x^* tal que $f(x^*) = x^*$.

Para probar este teorema, definiremos los siguientes conjuntos

$$C_i \equiv \{x \in S \mid \lambda_i(f(x)) \leq \lambda_i(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots, N+1$$

que satisfacen los requisitos para utilizar el KKM. Puesto que para cada punto x se debe cumplir que

$$\sum_{i \in I(x)} \lambda_i(x) = 1 \geq \sum_{i \in I(x)} \lambda_i(f(x))$$

siendo $I(x)$ el conjunto de cargadores de x , y, puesto que en los puntos donde se satisfaga el KKM debe cumplirse que

$$\sum_{i \in I(x)} \lambda_i(x) = \sum_{i \in I(x)} \lambda_i(f(x)) = 1,$$

de donde se sigue que $\lambda_1(\mathbf{x}) = \lambda_1(f(\mathbf{x}))$ y, por tanto $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, que es lo que se desea demostrar.

Como un ejemplo, considere el caso graficado a continuación, donde $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$.

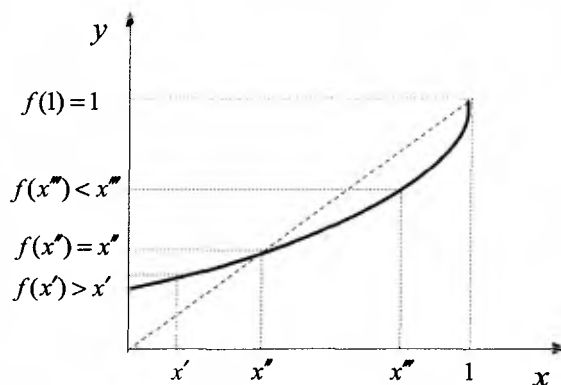


Figura II.5.6

Los puntos del dominio pueden escribirse como

$$\mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{x}).0 + \lambda_2(\mathbf{x}).1 = \lambda_2(\mathbf{x}).$$

Los del rango, como

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1(f(\mathbf{x})).0 + \lambda_2(f(\mathbf{x})).1 = \lambda_2(f(\mathbf{x})).$$

De acuerdo con las definiciones anteriores,

$$C_1 \equiv \{\mathbf{x} \in S \mid \lambda_1(f(\mathbf{x})) \leq \lambda_1(\mathbf{x})\} = [0, x''] \cup \{1\}$$

$$C_2 \equiv \{\mathbf{x} \in S \mid \lambda_2(f(\mathbf{x})) \leq \lambda_2(\mathbf{x})\} = [x''', 1]$$

donde $C_1 \cap C_2 = \{x'', 1\}$.

Estos puntos corresponden a los puntos fijos de la función graficada.

6. Puntos fijos, puntos periódicos y caos en sistemas dinámicos discretos

En la sección precedente presentamos el concepto de punto fijo en funciones continuas $f : X \rightarrow X$, siendo $X \subseteq \mathbb{R}^N$. En esta sección discutiremos el concepto en sistemas dinámicos discretos, utilizando únicamente funciones donde $X \subseteq \mathbb{R}$. Ello nos permitirá introducir el concepto de punto periódico, y otros estrechamente vinculados con él, con los cuales podremos construir una definición precisa de función caótica. Los temas

presentados a continuación pueden encontrarse desarrollados en Holmgren (1996) y Alligood, Saber y Yorke (1997).

a. Sistema dinámico discreto

Un sistema dinámico discreto se caracteriza por medio de una función $f : X \rightarrow X$ (frecuentemente llamada mapa) que se compone sobre sí misma una vez tras otra. Por medio de iteraciones se obtienen las funciones

$$f^2(x) = (f \circ f)(x)$$

$$f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x)$$

$$= (f \circ f^2)(x)$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = (f \circ f^{n-1})(x)$$

donde f^n indica que f se ha compuesto $n-1$ veces sobre sí misma. Por supuesto, n siempre es un número entero. El comportamiento de los puntos bajo iteración es llamado dinámica de la función.

Dado un punto $x_0 \in X$, llamado condición inicial, definiremos el conjunto de valores “futuros” de $x \in X$ determinados por f como

$$O^+(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

y le llamaremos órbita positiva de x_0 en f . En este texto no consideraremos el conjunto de valores “pasados”, que constituyen la órbita negativa de x_0 en f .

b. Puntos fijos, puntos periódicos y órbitas

Como vimos en la sección anterior, una función $f : X \rightarrow X$ tiene un punto fijo $x^* \in X$ si $f(x^*) = x^*$.

Un punto fijo $x^* \in X$ es un atractor si

$$\exists \epsilon \text{ tal que } \forall x \in B_\epsilon(x^*) \text{ se cumple que } \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*.$$

Por el contrario, un punto fijo $x^* \in X$ es un repeledor si

$$\forall \epsilon \wedge \forall x \in B_\epsilon(x^*) \setminus \{x^*\} \exists N > 0 \text{ tal que } f^n(x) \notin B_\epsilon(x^*) \quad \forall n \geq N.$$

Un punto p es llamado k -periódico (punto periódico de f con período k) si es un punto fijo de f^k y no lo es de f^j , siendo $1 \leq j < k$. La órbita k -periódica de p , también llamada k -ciclo, es el conjunto finito

$$\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{k-1}(p)\}.$$

Es importante notar que cualquiera de los k elementos de una órbita k -periódica es un punto k -periódico. Y puede ser útil señalar que un punto fijo es un punto 1-periódico.

Un punto x es llamado eventualmente k -periódico si existe un N tal que $f^{n+k}(x) = f^n(x)$ para todo $n \geq N$ (por supuesto, si $k=1$, el punto es llamado eventualmente fijo). Su órbita es llamada eventualmente k -periódica.

Una órbita $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$ es una órbita asintóticamente k -periódica si converge a una órbita k -periódica $\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$ a medida que $n \rightarrow \infty$. Ello implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0) - y_n| = 0$, siendo $\{y_n\}$ una sucesión definida de modo que

$$\begin{aligned} y_1 &= p, & y_2 &= f(p), \dots, & y_k &= f^{k-1}(p), \\ y_{k+1} &= p, & y_{k+2} &= f(p), \dots, & y_{2k} &= f^{k-1}(p), \\ y_{2k+1} &= p, & y_{2k+2} &= f(p), \dots, & y_{3k} &= f^{k-1}(p), \\ &\dots & & & \end{aligned}$$

Nótese que toda órbita eventualmente k -periódica también lo es asintóticamente. Lo contrario, sin embargo, no es cierto.

Una órbita caótica es una órbita acotada, ni periódica ni asintóticamente periódica, que despliega dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales. Esta última propiedad implica que dos órbitas pueden comenzar arbitrariamente cerca y, sin embargo, tener dinámicas claramente diferentes. Presentaremos estas ideas con detalles más adelante.

c. Una órbita 3-periódica implica una órbita n -periódica para todo entero positivo n

Sea $f: X \rightarrow X$ una función continua con $X \subseteq \mathbb{R}$. Si f tiene un punto 3-periódico, tiene un punto n -periódico para cada número natural n . Esta es una de las afirmaciones que puede probar el teorema de Sarkovskii. El teorema es muy importante, puesto que implica una dinámica extraordinariamente compleja para funciones con órbitas 3-periódicas.

Para probar este resultado, necesitaremos demostrar otro antes. Probaremos, en cuatro pasos, que una función continua f tiene al menos un punto fijo en $[a,b] \subseteq X$ si $[a,b] \subseteq f([a,b])$. Veamos:

1. Sean $c, d \in [a,b]$ tales que $f(c) = a$ y $f(d) = b$. Si $c = a$ o $d = b$, terminamos. Si no, continuamos, teniendo en cuenta que $c, d \in (a,b)$.
2. Definiendo la función $g(x) = f(x) - x$ obtenemos $g(c) < 0$ y $g(d) > 0$.
3. Puesto que f es continua, existe al menos un $e \in (a,b)$ entre c y d para el cual $g(e) = 0$. Esta proposición es conocida como teorema del valor intermedio.
4. Puesto que $e = f(e)$, hemos probado que existe al menos un punto fijo e para f .

Para probar parte del teorema de Sarkovskii comenzaremos definiendo una órbita 3-periódica y una sucesión anidada de intervalos cerrados.

Sea $\{a, b, c\}$ una órbita 3-periódica tal que $a < b < c$ y $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$. Con sus elementos construimos los intervalos cerrados $[a,b]$ y $[b,c]$. La continuidad de la función y el teorema del valor intermedio implican que $[b,c] \subseteq f([a,b])$ y $[a,c] \subseteq f([b,c])$. Puesto que podemos escribir la última relación como $[a,b] \cup [b,c] \subseteq f([b,c])$, podemos afirmar que $[a,b] \subseteq f([b,c])$ y $[b,c] \subseteq f([b,c])$. Ya hemos probado que la función f tiene al menos un punto fijo en $[b,c]$, porque $[b,c] \subseteq f([b,c])$, Este es, como hemos dicho, un punto 1-periódico.

Para probar la existencia de un punto n -periódico, utilizaremos una sucesión anidada de intervalos cerrados:

$$A_n \subseteq \dots \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0 \equiv [b, c]$$

tal que

- i. $A_{j-1} = f(A_j)$ para $j = 1, 2, \dots, n-2$
- ii. $A_0 = f(A_1) = f^2(A_2) = \dots = f^{n-2}(A_{n-2}) = [b, c]$
- iii. $f^{n-1}(A_{n-1}) = [a, b]$
- iv. $f^n(A_n) = [b, c]$

Probaremos que esta sucesión existe. Si llamamos $A_0 \equiv [b, c]$, podemos escribir $[b, c] \subseteq f([b, c])$ como $A_0 \subseteq f(A_0)$. Eliminando elementos de A_0 podemos definir un conjunto $A_1 \subseteq A_0$ tal que $A_0 = f(A_1)$. Ello implica que $A_1 \subseteq f(A_1)$. Del mismo modo, podemos continuar definiendo conjuntos A_j de modo que $A_{j-1} = f(A_j)$ para $j = 1, 2, \dots, n-2$. Con esto probamos la propiedad i.

Probamos ii observando que i implica, para $j = 1, 2, \dots, n-2$,

$$f^2(A_j) = f(f(A_j)) = f(A_{j-1}) = A_{j-2}$$

$$f^3(A_j) = f(f^2(A_j)) = f(A_{j-2}) = A_{j-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{j-1}(A_j) = f(f^{j-2}(A_j)) = f(A_{j-(j-2)}) = f(A_2) = A_1$$

$$f^j(A_j) = f(f^{j-1}(A_j)) = f(A_1) = A_0 = [b, c]$$

De las igualdades precedentes obtenemos que $f^{n-2}(A_{n-2}) = [b, c]$. Nuestras deducciones previas implican $[a, b] \subseteq f^{n-1}(A_{n-2}) = f(f^{n-2}(A_{n-2})) = f([b, c])$, y que podemos obtener un conjunto $A_{n-1} \subseteq A_{n-2}$ tal que $f^{n-1}(A_{n-1}) = [a, b]$. Con esto probamos la propiedad iii.

Por último, probamos la propiedad iv. Nuestras deducciones previas implican $f^n(A_{n-1}) = f(f^{n-1}(A_{n-1})) = f([a, b])$. Puesto que $[b, c] \subseteq f([a, b])$, podemos definir un conjunto $A_n \subseteq A_{n-1}$ tal que $f^n(A_n) = [b, c]$. Con esto concluimos la prueba.

La existencia de tal sucesión implica la existencia de un punto n -periódico en A_n . Probaremos este resultado en tres pasos.

1. Puesto que $A_n \subseteq f^n(A_n) = [b, c]$, la función f^n tiene un punto fijo en A_n , a quien llamaremos p . Por las propiedades de la sucesión, puede verificarse que

- i. $p = f^n(p) \in [b, c]$

- ii. $f^{n-1}(p) \in [a, b]$

- iii. $f(p), f^2(p), \dots, f^{n-2}(p) \in [b, c]$

Probaremos que si $n > 3$, $p \in (b, c)$.

2. Procederemos por contradicción. Supongamos que $p = c$. En este caso, $f(p) = a \notin [b, c]$. Puesto que hemos supuesto que únicamente $[a, b] \equiv f^{n-1}(A_{n-1})$, si $p = c$ entonces $n = 2$, lo que contradice que $n > 3$. Si suponemos, por otro lado, que $p = b$, entonces $f^2(p) = a \notin [b, c]$ y $n = 3$, lo que contradice que $n > 3$.
3. Hemos probado que si $n > 3$, entonces $p \in (b, c)$, por lo que $p \neq f^{n-1}(p) \in [a, b]$. Ello implica que p no es un punto fijo de f^{n-1} . Tampoco puede ser un punto fijo de f^j , con $j = 1, \dots, n-2$, porque dos de las propiedades de la sucesión se contradicen: no pueden cumplirse simultáneamente que $f^{j-1}(p) \in [a, b]$ y

$f(p), f^2(p), \dots, f^{n-2}(p) \in (b, c)$. Con ello probamos que p es un punto n -periódico de f .

d. *Funciones caóticas en R*

La función $f : X \rightarrow X$ es caótica si tiene tres propiedades:

- i. los puntos periódicos de f son densos en X , es decir, si
 $\forall x \in X \wedge \forall \varepsilon > 0$ existe un punto periódico p tal que $|p - x| < \varepsilon$
- ii. la función $f : X \rightarrow X$ es topológicamente transitiva sobre X , es decir, si
 $\forall x, y \in X \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists z \in X$ tal que $|z - x| < \varepsilon \wedge |f^n(z) - y| < \varepsilon$ para algún n
- iii. la función $f : X \rightarrow X$ exhibe dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales si
 $\forall x \in X \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \wedge \exists y \in X$ tales que $|x - y| < \varepsilon \wedge |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ para algún n .

Si X es un subconjunto infinito de R , y se cumplen las primeras dos condiciones, entonces se cumple la tercera y f es caótica sobre X . Probaremos esta afirmación a continuación en doce pasos.

1. Hay infinitos puntos periódicos de f , puesto que su conjunto es infinito y denso en X . Elegiremos dos que no se encuentren en la misma órbita. Sean q_1 y q_2 dos puntos periódicos tales que, para cualesquiera n o m , se satisfaga la desigualdad $|f^n(q_1) - f^m(q_2)| \geq 8\delta > 0$ para todo n o m .
2. Sea $x \in X$ arbitrariamente elegido. Por la desigualdad triangular,
 $|f^n(q_1) - x| + |x - f^m(q_2)| \geq |f^n(q_1) - f^m(q_2)| \geq 8\delta > 0$,
 de donde se sigue que hay un punto periódico q (sea q_1 , q_2 o ambos) tal que $|f^i(q) - x| \geq 4\delta$ para todo i (sea n o m).
3. Elegimos un punto k -periódico $p \in X$ tal que $|p - x| < \varepsilon < \delta$.
4. Elegimos un punto $z \in X$ tal que $|z - q| < \mu \leq \delta$. Por la continuidad de f ,
 $|f^i(z) - f^i(q)| < \delta$ para todo i tal que $0 \leq i \leq k$.
5. Elegimos un punto $y \in X$ y un número natural m tales que $|x - y| < \varepsilon$ y $|f^m(y) - q| < \mu$. Podemos hacerlo por la transitividad topológica de f .
6. Dados k y m , definimos $n = ak$ siendo a el menor entero mayor o igual que $\frac{m}{k}$.
 Con $i = n - m$, podemos escribir $|f^{n-m}(q) - x| \geq 4\delta$ (ver 2).

7. Aplicando la desigualdad triangular, podemos escribir

$$|f^{n-m}(q) - f^n(y)| + |f^n(y) - f^n(p)| + |f^n(p) - x| \geq |f^{n-m}(q) - x| \geq 4\delta$$
8. Puesto que $n = ak$ y p tiene período k , entonces $|f^n(p) - x| = |p - x| < \delta$ (ver 3).
9. Puesto que $f^n(y) = f^{n-m}(f^m(y))$, entonces $|f^{n-m}(f^m(y)) - f^{n-m}(q)| < \delta$ (ver 4 y 5).
10. La desigualdad triangular, una vez realizadas las sustituciones correspondientes (ver 7, 8 y 9), implica

$$|f^n(y) - f^n(p)| > 2\delta$$
11. Aplicando nuevamente la desigualdad triangular, obtenemos

$$|f^n(y) - f^n(x)| + |f^n(x) - f^n(p)| \geq |f^n(y) - f^n(p)| > 2\delta,$$
 por lo que $|f^n(y) - f^n(x)| > \delta$ o $|f^n(x) - f^n(p)| > \delta$.
12. Habiéndose elegido $|p - x| < \varepsilon$ y $|x - y| < \varepsilon$ (ver 3 y 5), hemos demostrado que existe un $w \in X$ (sea p o y) tal que $|w - x| < \varepsilon$ y $|f^n(w) - f^n(x)| > \delta$ para algún n . Ello implica dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales, y, por tanto, caos.

e. Una órbita 3-periódica implica caos

El teorema de Li-Yorke permite demostrar que una función con una órbita 3-periódica tiene un comportamiento caótico. No probaremos el teorema, limitándonos a ilustrarlo para un caso particular, representado en la figura II.6.1.

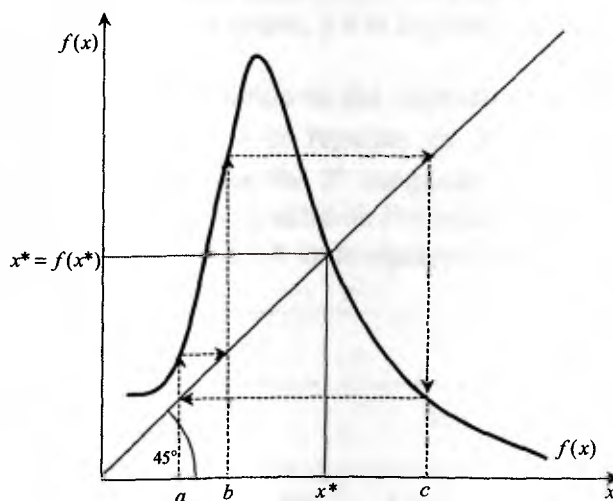


Figura II.6.1

En esta figura, el conjunto $\{a, b, c\}$ es una órbita 3-periódica tal que $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$. Puesto que $a < b < c$, podemos definir tres intervalos cerrados: el de la izquierda, $I = [a, b]$, el de la derecha, $D = [b, c]$, y la unión de los anteriores, $I \cup D = [a, c]$. La continuidad de la función y el teorema del valor intermedio implican que

$[b, c] \subseteq f([a, b])$ y $[a, c] \subseteq f([b, c])$, lo que podemos escribir como $D \subseteq f(I)$ e $I \cup D \subseteq f(D)$. El único punto fijo de la función es $x^* = f(x^*) \in D$.

Todo elemento de órbita que pertenezca a I tiene su sucesor inmediato en D o fuera de $I \cup D$. Todo elemento de órbita que pertenezca a D y sea menor que x^* tiene su sucesor inmediato en D . Por último, todo elemento de órbita que pertenezca a D y sea mayor que x^* tiene su sucesor inmediato en I . A partir de estas observaciones, pueden deducirse las reglas que rigen los itinerarios seguidos a partir de las condiciones iniciales elegibles en $I \cup D$. La identificación sucesiva de dichos itinerarios permite particionar el intervalo $I \cup D$ en subintervalos que tienen en común la ubicación de los primeros elementos del itinerario. Para fines de esta presentación, consideraremos únicamente los itinerarios definidos dentro de $I \cup D$. La notación que utilizaremos será una lista de letras I y D , que indicarán si un elemento particular de la órbita se encuentra en el intervalo de la izquierda o en el de la derecha. Por ejemplo, un intervalo denotado por la lista ID contiene las condiciones iniciales de órbitas cuyos itinerarios comienzan en I y cuyos elementos segundo y tercero se encuentran en D .

Las reglas para determinar los itinerarios son las siguientes:

- i. En ninguna parte de ningún itinerario I puede seguir inmediatamente a I .
- ii. Un intervalo que acabe en I se divide en dos. Uno que acaba en ID y otro que trataremos como una brecha (por comodidad, puesto que lleva la órbita fuera de $I \cup D$). La brecha se encuentra a la derecha del intervalo si el número de D en la lista es impar, y a la izquierda si es par.
- iii. Un intervalo que acabe en D también se divide en dos. Uno que acaba en DD y otro acaba en DI . El que acaba en DI se encuentra a la derecha del otro si el número de D en la lista es impar, y a la izquierda si es par.

Puesto que cada intervalo se divide en dos intervalos (incluyendo los que tratamos como brecha), los elementos de $I \cup D$ se reparten en 2^n intervalos diferentes. Dichos elementos son las condiciones iniciales de 2^n conjuntos de órbitas cuyos primeros n elementos tienen al menos una diferencia entre sí. Presentamos, a modo de ilustración, los subintervalos correspondientes a $n=1,2,3,4$ en la siguiente figura.

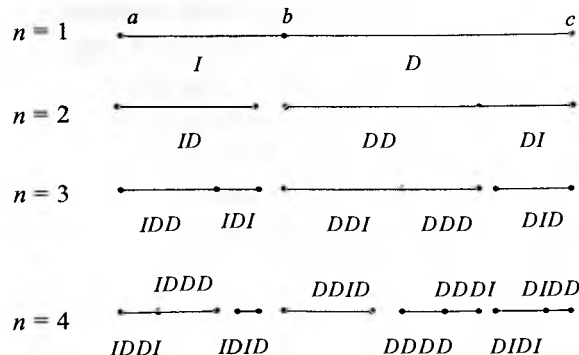


Figura II.6.2

La longitud del intervalo $I \cup D$ es $c - a$. Aun cuando la longitud de todos los subintervalos sea diferente, a medida que n se hace mayor la longitud de todos se hace menor. Por ello pueden encontrarse dos condiciones iniciales arbitrariamente cercanas, que definan órbitas diferentes.

Para probar que la función es caótica sólo necesitamos demostrar que dos condiciones iniciales pueden generar órbitas claramente diferentes. Para hacerlo, comenzaremos por llamar $J = S_1 \dots S_j D$ a cualquier subintervalo que acabe en D y registre la ubicación de los primeros $j+1$ elementos de una órbita (S_i puede ser I o D). Llamaremos 2ε a la longitud de J y δ a la longitud del intervalo DD ,

Para considerar cinco elementos adicionales de las órbitas que comienzan en J , debemos identificar 2^5 subintervalos de J . Con ello garantizamos que cada subintervalo tenga una longitud inferior a ε . Utilizaremos dos de los tres subintervalos que pueden definirse a partir de $J_1 = S_1 \dots S_j D S_{j+2} S_{j+3} D I D$ para probar la dependencia sensitiva sobre condiciones iniciales: para todo $x \in J_1$ existe un $w \in J$ tal que $|w - x| < \varepsilon$ y $|f^n(w) - f^n(x)| > \delta$ para algún n .

La afirmación anterior se sostiene sobre una conveniente elección de $S_{j+2} S_{j+3}$ en J_1 . Observemos en la figura que la distancia entre ID y DI es mayor que la longitud de DD , que llamamos δ . La distancia bajo iteración de las órbitas $S_1 \dots S_j D I D D I D$ y $S_1 \dots S_j D D I D I D$ eventualmente excede δ . Puesto que esto implica que la función exhibe dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales, hemos verificado que la función que hemos discutido es caótica.

7. Resumen

Si se supone que el comportamiento de los individuos y los sistemas económicos puede representarse por medio de las matemáticas, es necesario conocer las características de las funciones más utilizadas en la teoría neoclásica. Aquí se han presentado algunas de ellas, en términos generales. Cualquier función estrictamente cuasiconcava y estrictamente creciente, por ejemplo, da origen a curvas de nivel estrictamente convexas. Cualquier función continua sobre dominio compacto tiene máximo y mínimo. Cualquier función continua definida de un simplex en sí mismo tiene al menos un punto fijo. Una función continua que define un sistema dinámico discreto puede implicar convergentes a un punto fijo, divergentes, periódicas o caóticas. Conocer las propiedades de las funciones permite plantear problemas de optimización y equilibrio que siempre tienen solución bajo condiciones muy generales.

III. Equilibrio general estático con certidumbre

Introducción

En el siguiente Capítulo se definen los agentes que participan en una economía Walrasiana, y se presentan el concepto de equilibrio Walrasiano y algunas de sus propiedades más importantes. Además, se expone la relación entre los conceptos de equilibrio Walrasiano y óptimo de Pareto, indispensables en el estudio de la economía del bienestar. Se recomiendan como lecturas introductorias Henderson y Quandt (1995), Kreps (1990), Quirk y Saposnik (1972), Silberberg (1990), Starr (1997), Varian (1992) y Villar (2001). Lecturas avanzadas son Arrow y Hahn (1977), Debreu (1983 y 1987), Ellickson (1993), Kirman (1998) y Mas-Colell, Whinston y Green (1995). Este último ha servido de base para estructurar el Capítulo.

El contenido de este Capítulo es básico para los dos siguientes. Las teorías del equilibrio general con incertidumbre y del equilibrio general dinámico presentadas en ellos son extensiones de la teoría del equilibrio general estático con certidumbre expuesta a continuación.

1. Consumidores y empresas en una economía Walrasiana

En esta sección se definen las preferencias y restricciones presupuestarias de los consumidores, y los objetivos y restricciones tecnológicas de las empresas.

a. El problema del consumidor

El conjunto de cestas de bienes del consumidor i es $X_i = R_+^L$, y se le supone ordenado por una relación de preferencias débil, $\succeq_i$. A partir de dicha relación podemos obtener la relación de preferencia estricta, $\succ_i$, y la relación de indiferencia, $\sim_i$. La primera,

$$x \succ_i y \Rightarrow [x \succeq_i y \wedge y \not\succeq_i x],$$

se lee “ i prefiere estrictamente x a y implica que prefiere débilmente x a y y no prefiere débilmente y a x ”. La segunda,

$$x \sim_i y \Rightarrow [x \succeq_i y \wedge y \succeq_i x],$$

se lee “ i es indiferente entre x y y implica que débilmente x a y y prefiere débilmente y a x ”.

Se dice que el consumidor i es racional si tal relación es completa, es decir, si

$$\forall x, y \in X_i, x \succeq_i y \vee y \succeq_i x,$$

y si es transitiva, es decir, si

$$\forall x, y, z \in X_i, [x \succeq_i y \wedge y \succeq_i z] \Rightarrow x \succeq_i z.$$

A los supuestos de racionalidad, añadimos los siguientes:

- i. $\succeq_i$ es monótona si $y \gg x$ implica $y \succ_i x$. Es fuertemente monótona si $y \geq x$ y $y \neq x$ implica $y \succ_i x$.
- ii. $\succeq_i$ es localmente insaciable si $\forall x \in X_i$ existe un $y \in X_i$ tal que $\|y - x\| \leq \varepsilon$ y $y \succ_i x$.
- iii. $\succeq_i$ es convexa si $[y \succeq_i x \wedge z \succeq_i x] \Rightarrow \alpha y + (1 - \alpha)z \succeq_i x$ con $\alpha \in [0, 1]$. Es estrictamente convexa si $[y \succ_i x \wedge z \succ_i x] \Rightarrow \alpha y + (1 - \alpha)z \succ_i x$ con $\alpha \in (0, 1)$.
- iv. $\succeq_i$ es continua si, para cualquier $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \succeq_i y_n$ para todo n , con $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, se cumple que $x \succeq_i y$.

Puede definirse un conjunto de cestas accesibles para cada individuo i , subconjunto de $X_i = R_+^L$, teniendo en cuenta su capacidad de compra. Diremos que un individuo no puede gastar más que su riqueza (en un modelo estático no es relevante distinguir entre ingreso y riqueza). En una economía con producción, la riqueza de i se define como la suma del valor de sus dotaciones, ω_i , y de sus participaciones en el beneficio de cada empresa j , $p \cdot y_j$. Si el individuo i posee la proporción $\theta_{ji} \in [0, 1]$ de la empresa j , puede adquirir una cesta de bienes dentro del conjunto

$$B_i = \left\{ x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ji} p \cdot y_j \right\},$$

que llamaremos conjunto presupuestario. El problema del consumidor es hallar una cesta $x_i^* \in B_i$ que sea maximal de $\succeq_i$.

El problema del consumidor puede plantearse representando las relación de preferencias por medio de funciones de utilidad. Relaciones de preferencias continuas pueden ser representadas por medio de funciones de utilidad continuas. Si son fuertemente monótonas, por funciones estrictamente crecientes. Si son estrictamente convexas, por funciones estrictamente cuasicóncavas. La solución del problema del consumidor planteado en estos términos es una función continua, que puede obtenerse utilizando el método de Kuhn-Tucker, y que suele llamarse función de demanda Marshalliana. Esta función indica la cesta óptima que elegiría un consumidor que maximice su utilidad dentro de su conjunto presupuestario, y puede escribirse como

$$x_i \left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ji} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \right)$$

Si el consumidor i no tiene participación en los beneficios de las empresas, la función de demanda Marshalliana se escribe como

$$x_i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \omega_i),$$

donde $x_{il}(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \omega_i)$ es la cantidad demandada del bien l por el consumidor i .

La función de demanda Marshalliana es homogénea de grado 0 en los precios, puesto que ni $\succeq_i$ ni B_i son diferentes con $\mathbf{p}$ y $\alpha \mathbf{p}$, siendo $\alpha \geq 0$.

b. El problema de la empresa

La empresa es una unidad tecnológica que combina insumos para obtener productos, con el objetivo de maximizar beneficios. Para su estudio, introducimos el concepto de plan de producción. En una economía con L bienes, un plan de producción para la empresa j es un punto

$$\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{jL})$$

tal que, si $y_{jl} < 0$, se dice que el bien l es un insumo neto para la empresa j , y si $y_{jl} > 0$, se dice que el bien l es un producto neto de la empresa j . Si $y_{jl} = 0$, se dice que el bien l no es un producto neto de la empresa j . La razón para dicha convención será evidente más adelante.

El conjunto de planes de producción factibles para la empresa j , es decir, tecnológicamente posibles, es un dato primitivo de la teoría. Es llamado conjunto de planes de producción de j , y denotado por $Y_j \in R^L$. Supondremos que el conjunto es no vacío y cerrado, y que

- | | |
|---|---------------------------|
| i. $\mathbf{0} \in Y_j$ | (posibilidad de inacción) |
| ii. $Y_j \cap R_+^L = \{\mathbf{0}\}$ | (no hay almuerzo gratis) |
| iii. $[\mathbf{y}_j \in Y_j \wedge \mathbf{y}_j \neq \mathbf{0}] \Rightarrow -\mathbf{y}_j \notin Y_j$ | (irreversibilidad) |
| iv. $Y_j - R_+^L \subset Y_j$ | (libre eliminación) |
| v. $[\mathbf{y}_j \in Y_j \wedge \mathbf{y}'_j \in Y_j] \Rightarrow \mathbf{y}_j + \mathbf{y}'_j \in Y_j$ | (aditividad) |

Adicionalmente, podemos suponer que $Y_j \in R^L$ exhiba rendimientos no crecientes a escala, no decrecientes a escala o crecientes a escala. Diremos que los rendimientos son

- i. no crecientes a escala si $[y_j \in Y_j \wedge \alpha y'_j \in Y_j]$ con $\alpha \in [0,1]$
- ii. no decrecientes a escala si $[y_j \in Y_j \wedge \alpha y'_j \in Y_j]$ con $\alpha \geq 1$
- iii. constantes a escala si $[y_j \in Y_j \wedge \alpha y'_j \in Y_j]$ con $\alpha \geq 0$

Si $y_j, y'_j \in Y_j$ y $\alpha y_j + (1-\alpha)y'_j \in Y_j$, se dice que $Y_j \in R^L$ es convexo. Ello es cierto si los rendimientos son no crecientes a escala, y si son constantes a escala. Si $\alpha y_j + (1-\alpha)y'_j \in \text{Int} Y_j$, $Y_j \in R^L$ es estrictamente convexo y los rendimientos son decrecientes a escala (no crecientes a escala y no constantes a escala).

El problema de la empresa j es maximizar su beneficio dada su restricción tecnológica. El problema puede escribirse como

$$\text{Max}_{y_j} p \cdot y_j \quad \text{sujeto a} \quad y_j \in Y_j.$$

En esta formulación, podemos notar la ventaja de definir el plan de producción con la convención de signos propuesta. En el producto escalar $\pi_j = p \cdot y_j$ los sumandos positivos corresponden a ingresos, y los negativos a costos.

Puede ser útil describir $Y_j \in R^L$ por medio de una función $F(\cdot)$, llamada función de transformación, tal que $F(y_j) < 0$ si $y_j \in \text{Int} Y_j$ y $F(y_j) = 0$ sólo si $y_j \in \partial Y_j$.

$$\text{Max}_{y_j} p \cdot y_j \quad \text{sujeto a} \quad F(y_j) \leq 0.$$

Cuando los rendimientos son decrecientes a escala, la solución es una función continua $y_j(p)$, llamada función de oferta de la empresa j . Dicha función es homogénea de grado 0 en los precios.

2. El equilibrio Walrasiano

En esta sección se definen equilibrios Walrasianos (en economías con y sin empresas), funciones de exceso de demanda y economías regulares.

a. Definición

a.1. Equilibrio Walrasiano en una economía con producción

Una economía con producción, llamada economía con propiedad privada, es un conjunto formado por consumidores y empresas, y para el cual se especifica la asignación de dotaciones y participaciones en la propiedad de las empresas. Ello puede escribirse como

$$(\{(X_i, \succeq_i)\}_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J, \{(\omega_i, \theta_{i1}, \dots, \theta_{iJ})\}_{i=1}^I).$$

Un equilibrio Walrasiano es una asignación

$$(x_1^*, \dots, x_I^*, y_1^*, \dots, y_J^*) \in X_1 \times \dots \times X_I \times Y_1 \times \dots \times Y_J \subset R^{L(I+J)}$$

y un vector de precios $p = (p_1, \dots, p_L) \in R^L$

tales que

$$i) \quad \forall j \quad y_j^* \text{ satisface } p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j \quad \forall y_j \in Y_j$$

$$ii) \quad \forall i \quad x_i^* \text{ es maximal para } \succeq_i \text{ en el conjunto presupuestario}$$

$$B_i = \left\{ x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ji} p \cdot y_j^* \right\}$$

$$iii) \quad \sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \sum_i \omega_i$$

a.2. Equilibrio Walrasiano en una economía de intercambio puro

Una economía de intercambio puro, donde los bienes no son productos de empresas, sino dotaciones, puede escribirse como

$$i) \quad y_1^* \leq 0, \quad p \cdot y_1^* = 0 \quad p \geq 0$$

$$ii) \quad \forall i \quad x_i^* \text{ es maximal para } \succeq_i \text{ en el conjunto presupuestario}$$

$$B_i = \{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}$$

$$iii) \quad \sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i = y_1^*$$

a.3. La caja de Edgeworth

Los conceptos asociados a una economía de intercambio puro suelen ilustrarse limitando la discusión a una economía con dos consumidores, y graficando las condiciones del equilibrio por medio del siguiente diagrama, conocido como caja de Edgeworth.

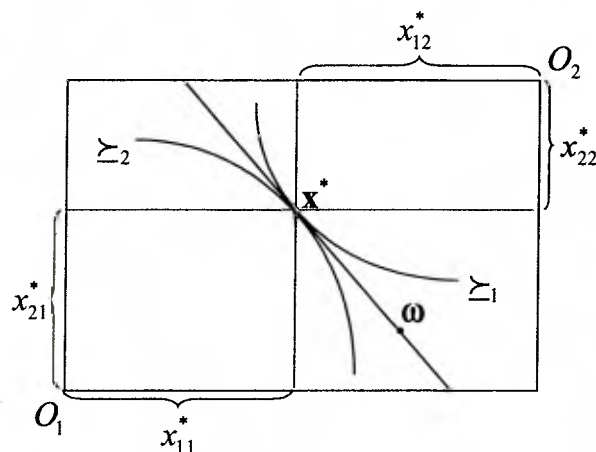


Figura III.2.1

En la caja de Edgeworth, ω señala las dotaciones de ambos individuos. Sus coordenadas indican las dotaciones del consumidor 1, si se lee desde O_1 hacia O_2 , y las del consumidor 2, si se lee desde O_2 hacia O_1 . La pendiente de la recta que pasa a través de ω es $\frac{p_1}{p_2}$. Dicha recta es la frontera de los conjuntos presupuestarios de ambos consumidores.

El equilibrio existe si sobre dicha recta puede hallarse un punto x^* tal que ambos consumidores alcancen su máxima utilidad posible y la suma de las cantidades consumidas de ambos iguale las dotaciones existentes de ambos bienes.

Los problemas comentados más adelante en este Capítulo pueden ilustrarse para dos consumidores y una empresa utilizando la caja de Edgeworth, y su relación con las fronteras de posibilidades de utilidad y de producción, y con las funciones de bienestar social [ver Call y Holahan (1995) y Miller y Meiners (1993)].

b. Equilibrio Walrasiano y función de exceso de demanda

El equilibrio Walrasiano requiere que todos los mercados se vacíen simultáneamente, mientras todos los agentes participantes en la economía resuelven sus problemas de optimización respectivos. Un concepto útil para probar la existencia del equilibrio y discutir sus propiedades es el de función de exceso de demanda, que presentaremos primero para el caso de una economía de intercambio puro y luego para el de una economía con producción.

b.1. Función de exceso de demanda en una economía de intercambio puro

El exceso de demanda del bien l por el consumidor i se escribe como

$$z_{il}(\mathbf{p}) = x_{il}^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \omega_i) - \omega_{il},$$

componente l -ésima del vector de exceso de demanda del consumidor i ,

$$z_i(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \omega_i) - \omega_i = \begin{bmatrix} z_{i1}(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ z_{iL}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}.$$

A partir de los excesos de demanda individuales, podemos obtener la función de exceso de demanda agregado,

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{z}_i(\mathbf{p}),$$

que podemos escribir como

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} z_1(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ z_L(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(\mathbf{p}) + \dots + z_{I1}(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ z_{1L}(\mathbf{p}) + \dots + z_{IL}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

La componente l -ésima de este vector es, como puede observarse, el exceso de demanda del bien l en la economía. Un equilibrio Walrasiano en una economía de intercambio puro ocurre cuando $\mathbf{z}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}$, o, en el caso más sencillo, cuando $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Por tal razón, deducir las propiedades de la función $\mathbf{z}(\cdot)$ y su relación con $\mathbf{p}$ es fundamental para determinar las propiedades del equilibrio Walrasiano. Las propiedades de $\mathbf{z}(\cdot)$ en una economía de intercambio puro dependen de los supuestos que se hagan con respecto a las preferencias de los consumidores, y a sus dotaciones. A continuación, nos referiremos a las propiedades de $\mathbf{z}(\cdot)$ definida sobre $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, cuando se supone que, para todo consumidor i , las preferencias $\succeq_i$ son continuas, estrictamente convexas y fuertemente monótonas, y que $\omega_i \gg \mathbf{0}$.

1. La función $\mathbf{z}(\cdot)$ es continua. Ello se debe a la continuidad de $\mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \omega_i)$. Esta propiedad es indispensable para probar la existencia del equilibrio Walrasiano por medio del teorema del punto fijo de Brouwer. Es frecuente suponer que, además de ser continua, la función $\mathbf{z}(\cdot)$ es diferenciable con respecto a $\mathbf{p}$. En este caso, es posible obtener la matriz (jacobiana) de efectos de los precios sobre los excesos de demanda de cada bien:

$$D\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial z_1(\mathbf{p})}{\partial p_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_L(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial z_L(\mathbf{p})}{\partial p_L} \end{bmatrix}$$

2. La función $z(\cdot)$ es homogénea de grado 0, puesto que $x_i^*(p, p \cdot \omega_i)$ también lo es. Gracias a esta propiedad, es posible asignar por medio de $z(\cdot)$ la misma imagen a diferentes vectores de precios con iguales precios relativos. Un vector de precios multiplicado por un λ convenientemente elegido se transforma en un vector equivalente λp . A esta operación se le llama normalización de p . Distintas razones justifican el tipo de normalización utilizada para cada caso.

- a. En ocasiones es conveniente elegir un bien como numerario, es decir, hacer arbitrariamente igual a 1 el precio de un bien. En este caso, los precios de los demás bienes se expresan como unidades del numerario que deben intercambiarse por unidad del bien considerado. Obsérvese que la elección del numerario es arbitraria. Si es el bien 1, $\lambda = \frac{1}{p_1}$, y

$$z(p_1, p_2, \dots, p_L) = z\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_L}{p_1}\right).$$

y, si es el bien L , entonces $\lambda = \frac{1}{p_L}$ y

$$z(p_1, p_2, \dots, p_L) = z\left(\frac{p_1}{p_L}, \dots, \frac{p_{L-1}}{p_L}, 1\right).$$

- b. Para probar la existencia del equilibrio Walrasiano utilizando el teorema del punto fijo de Brouwer, el conjunto de precios debe ser un simplex. En este caso,

$$\lambda = \frac{1}{\sum_i p_i} \text{ y, por la homogeneidad de } z(\cdot),$$

$$z(p_1, p_2, \dots, p_L) = z\left(\frac{p_1}{\sum_i p_i}, \frac{p_2}{\sum_i p_i}, \dots, \frac{p_L}{\sum_i p_i}\right).$$

- c. En algunos casos, como al considerar la estabilidad dinámica en tiempo continuo del equilibrio Walrasiano, es conveniente transformar el vector p en un vector equivalente que pertenezca a la frontera de la parte positiva de una esfera con centro 1 y radio 0. En este caso,

$$z(p_1, p_2, \dots, p_L) = z\left(\frac{(p_1)^2}{\sum_i (p_i)^2}, \frac{(p_2)^2}{\sum_i (p_i)^2}, \dots, \frac{(p_L)^2}{\sum_i (p_i)^2}\right).$$

3. Siempre que las restricciones presupuestarias de los consumidores sean satisfechas (dentro o fuera del equilibrio), se satisface la ecuación $p \cdot z(p) = 0$, conocida como ley de Walras. Desarrollando la expresión

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) &= \sum_l p_l z_l(\mathbf{p}) = \sum_l p_l \left[\sum_i z_{il}(\mathbf{p}) \right] \\
&= \sum_l p_l \left[\sum_i [x_{il}^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i) - \omega_{il}] \right] \\
&= \sum_i \sum_l p_l [x_{il}^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i) - \omega_{il}]
\end{aligned}$$

y recordando que, para todo i , se cumple $\sum_l p_l x_{il}^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i) = \sum_l p_l \omega_{il}$, se prueba que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$. La ley de Walras tiene una importante implicación. Si $z_l(\mathbf{p}) = 0$ para $l = 1, \dots, L-1$, entonces necesariamente $z_L(\mathbf{p}) = 0$. Las primeras aproximaciones al problema del equilibrio general se limitaban hallar el vector $\mathbf{p}$ que resolviese el sistema de ecuaciones $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$. La ley de Walras explica la dependencia funcional de las L ecuaciones del sistema, y justifica la eliminación de una ecuación y la fijación arbitraria del precio de un bien antes de intentar determinar un equilibrio Walrasiano. Si eliminamos la última ecuación, el bien L puede tratarse como numerario, haciendo $p_L = 1$. O, por otra parte, si los precios son elementos de un simplex, el precio del bien L queda determinado por $p_L = 1 - \sum_{l=1}^{L-1} p_l$, al determinar los restantes $L-1$ precios.

4. La función de exceso de demanda del bien l es acotada por abajo, por lo que, para cualquier l , es cierto que existe un $s > 0$ tal que $z_l(\mathbf{p}) > -s$. Ello es consecuencia de la no negatividad de las funciones de demanda.
5. Si las preferencias son fuertemente monótonas, como estamos suponiendo, la función de exceso de demanda satisface una condición de frontera: si $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$, con $\mathbf{p} \neq 0$ y $p_l = 0$ para algún l , entonces $\text{Max}\{z_1(\mathbf{p}_n), \dots, z_L(\mathbf{p}_n)\} \rightarrow \infty$. Esta condición indica que, siempre que se abarata un bien, la cantidad demandada por algún consumidor puede hacerse mayor. La consideración de vectores de precio de equilibrio con alguna componente nula es imposible en este caso. Sin embargo, si se levanta el supuesto de preferencias fuertemente monótonas, es posible probar la existencia de equilibrios con estas características.

Utilizando las propiedades comentadas, es posible probar que al menos existe un equilibrio Walrasiano, y que generalmente hay un número impar de tales equilibrios. Eso lo comentaremos más adelante. Sin embargo, antes de abandonar esta sección, es conveniente anunciar lo siguiente. Para estudiar otras propiedades del equilibrio general, como la unicidad o la estabilidad, es necesario imponer supuestos adicionales. Cualquier función $\mathbf{z}(\cdot)$ definida sobre $\mathbf{p} \gg 0$ puede ser generada para una economía con tantos consumidores como bienes, de modo que satisfaga las cinco propiedades comentadas. Esta afirmación, conocida como teorema Sonnenschein-Mantel-Debreu [ver Farmer (1993), Kirman (1998) y Mas-Colell, Whinston y Green (1995).], permite hallar siempre, para una economía con

tantos consumidores como bienes, una función $z(\cdot)$ que sea compatible con un número impar de equilibrios definidos arbitrariamente, con $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$. Por tal razón, aun cuando podamos probar la existencia del equilibrio Walrasiano con cinco propiedades, necesitaremos añadir nuevas restricciones para poder describirlo.

b.2. Función de exceso de demanda en una economía con producción

Las cinco propiedades comentadas al presentar la función de exceso de demanda en una economía de intercambio puro también pueden suponerse en una economía con producción. De todas ellas, nos detendremos únicamente en la demostración de la ley de Walras.

Sea la función de exceso de demanda

$$z(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{x}_i \left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p}) \right) - \sum_i \omega_i - \sum_j \mathbf{y}_j(\mathbf{p}).$$

La ley de Walras establece que el valor del exceso de demanda es igual a cero, es decir, que $\mathbf{p} \cdot z(\mathbf{p}) = 0$, siempre que los consumidores se encuentren sobre su restricción presupuestaria. Para la prueba que seguimos a continuación, llamamos w_i a la riqueza del consumidor i -ésimo, de modo que $w_i = \mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p})$, y $\pi_j(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j(\mathbf{p})$, y suponemos que el gasto es igual a la riqueza, por lo que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - w_i = 0$.

La prueba se presenta en pasos:

1. El valor del exceso de demanda agregado se escribe como

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot z(\mathbf{p}) &= \mathbf{p} \cdot \left[\sum_i \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \sum_i \omega_i - \sum_j \mathbf{y}_j(\mathbf{p}) \right] \\ &= \sum_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \sum_i \mathbf{p} \cdot \omega_i - \sum_j \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

2. Sabiendo que el beneficio de la empresa j -ésima es $\pi_j(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j(\mathbf{p})$, escribimos

$$\mathbf{p} \cdot z(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \sum_i \mathbf{p} \cdot \omega_i - \sum_j \pi_j(\mathbf{p}).$$

3. Cada individuo i -ésimo posee una participación en el beneficio de la empresa j -ésima igual a $\theta_{ij} \in [0,1]$. El beneficio de cada empresa j -ésima se reparte entre todos los individuos, de modo que $\pi_j(\mathbf{p}) = \sum_i \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p})$. Por lo tanto,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \sum_i \mathbf{p} \cdot \omega_i - \sum_j \left[\sum_i \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p}) \right]$$

4. Uno de los componentes de la riqueza de cada individuo i -ésimo es la suma de sus participaciones en los beneficios de todas las empresas. La suma de todos estos componentes debe ser igual a la suma de los beneficios de todas las empresas, es decir,

$$\sum_i \left[\sum_j \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p}) \right] = \sum_j \pi_j(\mathbf{p}) = \sum_j \left[\sum_i \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p}) \right],$$

por lo que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \sum_i \mathbf{p} \cdot \omega_i - \sum_j \left[\sum_i \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p}) \right].$$

5. Escribiendo el valor del exceso de demanda como

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \sum_i \left[\mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p}) \right]$$

puede concluirse que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_i [\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - w_i]$$

donde se observa que el valor del exceso de demanda es igual a la suma de las diferencias entre gasto y riqueza para cada individuo i -ésimo. Si cada uno se encuentra sobre su restricción presupuestaria, se cumple que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0.$$

c. Economías regulares y teorema del índice

c.1. Economías regulares

A continuación, supondremos que, para la función $\hat{\mathbf{z}}: R^{L-1} \supseteq \bar{P} \rightarrow R^{L-1}$, es posible obtener una matriz (jacobiana)

$$D\hat{z}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial z_1(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_{L-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_{L-1}(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial z_{L-1}(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_{L-1}} \end{bmatrix}.$$

Cada punto del dominio, $\bar{\mathbf{p}}$, puede clasificarse de acuerdo con el valor del determinante $|D\hat{z}(\bar{\mathbf{p}})|$ evaluado en él. Un punto $\bar{\mathbf{p}}^0$, para el cual $|D\hat{z}(\bar{\mathbf{p}}^0)| \neq 0$, es llamado punto regular de $\hat{z}$, y su imagen, $\hat{z}(\bar{\mathbf{p}}^0)$, valor regular de $\hat{z}$. Un punto que no es regular, es llamado punto crítico, y a su imagen, se le llama valor crítico.

Sabemos que un vector de precios de equilibrio Walrasiano es todo $\mathbf{p} = (\bar{\mathbf{p}}^*, 1)$, para el cual $\bar{\mathbf{p}}^*$ satisfaga la ecuación $\hat{z}(\bar{\mathbf{p}}^*) = 0$. Si $\bar{\mathbf{p}}^*$ es un punto regular, el equilibrio es llamado regular. En caso contrario, el equilibrio es crítico. Una economía es regular si todos sus equilibrios son regulares. A continuación, expondremos las razones por las cuales los equilibrios regulares se consideran de buen comportamiento, mientras que los críticos se consideran patológicos, y por qué se afirma que “casi todos” los equilibrios son regulares.

Antes de hacerlo, ilustraremos los conceptos expuestos para un caso con dos bienes. Por la ley de Walras, si elegimos por numerario al bien 2, habrá un equilibrio Walrasiano siempre que $z_1(p_1^*, 1) = 0$. En el siguiente gráfico, podemos observar que ello ocurre en p_1' y p_1'' .

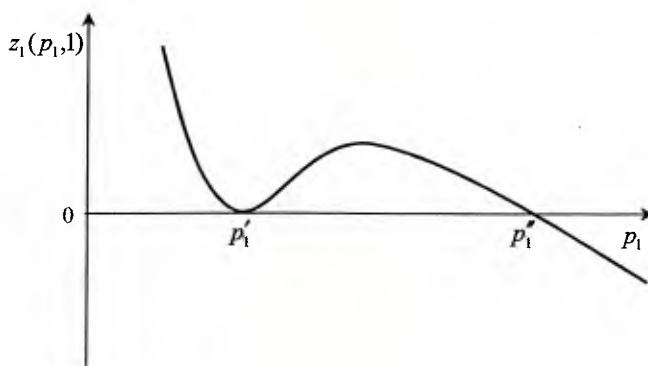


Figura III.2.2

Así mismo, podemos notar que $\frac{\partial z_1(p_1')}{\partial p_1} = 0$ y $\frac{\partial z_1(p_1'')}{\partial p_1} < 0$, por lo que p_1' conduce a un equilibrio crítico y p_1'' a uno regular. Una economía en la que esto pueda ocurrir no es regular.

Dado un punto regular $\bar{\mathbf{p}}^0 \in \bar{\mathcal{P}}$, el teorema de la función inversa permite probar que existe una vecindad abierta U de $\bar{\mathbf{p}}^0$ tal que $\hat{z}$ es inyectiva en U , por lo que la relación

inversa $\hat{z}^{-1} : \hat{z}(U) \rightarrow U$ es una función bien definida, continua y derivable tantas veces como $\hat{z}$. Si, dado U , $0 \in \hat{z}(U)$, disponer de la función inversa permite hallar un único $\bar{p}^* = \hat{z}^{-1}(0) \in U$. Puesto que en la vecindad U el punto $\bar{p}^*$ es el único para el cual $p = (\bar{p}^*, 1)$ es un vector de precios de equilibrio, podemos afirmar que el equilibrio es localmente único, o aislado.

Si la economía es regular, el conjunto de sus puntos de equilibrio está formado por puntos aislados. Es, por tanto, un conjunto discreto, y, en consecuencia, abierto y cerrado. Si consideramos que $p \gg 0$, existe un $r > 0$ tal que, para todo l , se cumpla que $\frac{1}{r} < p_l < r$. Por tal razón, podemos afirmar que el conjunto de soluciones es acotado. Siendo un conjunto cerrado, acotado y discreto, es también finito.

Otro modo de probar que el conjunto de puntos de equilibrio es finito cuando lo constituyen puntos aislados recurre a la contradicción. Suponemos, en principio, que los vectores de precios son elementos de un simplex. Recordemos que el simplex es un conjunto compacto. Si pudiéramos hallar una sucesión infinitos puntos de equilibrio dentro de un simplex, podríamos hallar una subsucesión convergente a un punto de equilibrio dentro del simplex. Si utilizamos este punto como centro de una bola, no importa el tamaño del radio siempre la bola contendría infinitos puntos de equilibrio. En este caso, el centro de la bola no podría ser un punto de equilibrio aislado, como supusimos al principio.

c.2. Teorema del índice

A cada vector de precios de equilibrio regular puede asignársele un índice, definido como

$$\text{índice } p = (-1)^{L-1} \text{sgn} |D\hat{z}(p)|$$

Puede probarse que, si una economía es regular, se cumple que

$$\sum_{\{p: z(p)=0, p_L=1\}} \text{índice } p = +1.$$

A partir de este resultado, conocido como teorema del índice, puede obtenerse información adicional con respecto a las economías regulares. En primer lugar, permite definir dos tipos de equilibrios regulares, de los cuales es inevitable que se obtenga al menos uno con índice +1 (si el equilibrio es único, su índice es +1). En segundo lugar, es posible probar que el número de equilibrios en una economía regular es impar. Y, en tercer lugar, es posible utilizar el teorema del índice para establecer condiciones de equilibrio único en economías regulares.

c.3. Un ejemplo con dos bienes

Ilustramos las definiciones precedentes para un caso con dos bienes. Por la ley de Walras, si elegimos por numerario el bien 2, habrá un equilibrio Walrasiano siempre que $z_1(p_1^*, 1) = 0$. En este caso, ello ocurre en los puntos p_1' , p_1'' y p_1''' .

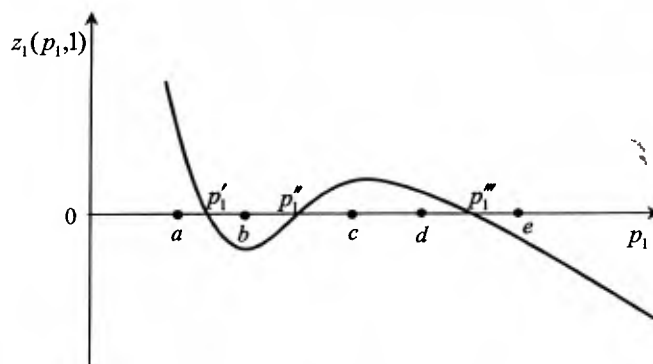


Figura III.2.2

La economía es regular, puesto que $\frac{\partial z_1(p_1')}{\partial p_1} < 0$, $\frac{\partial z_1(p_1'')}{\partial p_1} > 0$ y $\frac{\partial z_1(p_1''')}{\partial p_1} < 0$. Para cada precio de equilibrio podemos definir una vecindad abierta que lo contenga. Por ejemplo, $p_1' \in (a, b) \subset R$, $p_1'' \in (b, c) \subset R$ y $p_1''' \in (d, e) \subset R$. Puesto que podemos aplicar el teorema de la función inversa, podemos afirmar que cada equilibrio es localmente único: no hay otro precio que implique un equilibrio en ninguna de las vecindades definidas.

A cada equilibrio puede asignarse un índice: si la derivada de $z_1(p_1, 1)$ en equilibrio es negativa, el índice es +1. Si es positiva, el signo es -1. Si el precio es “muy” bajo, el exceso de demanda es positivo. Si es “muy” alto, ocurre lo contrario. Podemos observar en este caso que los signos de las derivadas se alternan, comenzando con $\frac{\partial z_1(p_1')}{\partial p_1} < 0$. El número de equilibrios es impar, y la suma de índices es +1.

Puede probarse, en un sentido preciso, que “casi todas” las economías son regulares. Para ilustrar esta afirmación, observemos el siguiente ejemplo. En él, la función de exceso de demanda se escribe como $z_1[(p_1, 1), \omega_{11}]$, incorporando explícitamente la dotación del bien 1 asignada al individuo 1, ω_{11} , como argumento de la función.

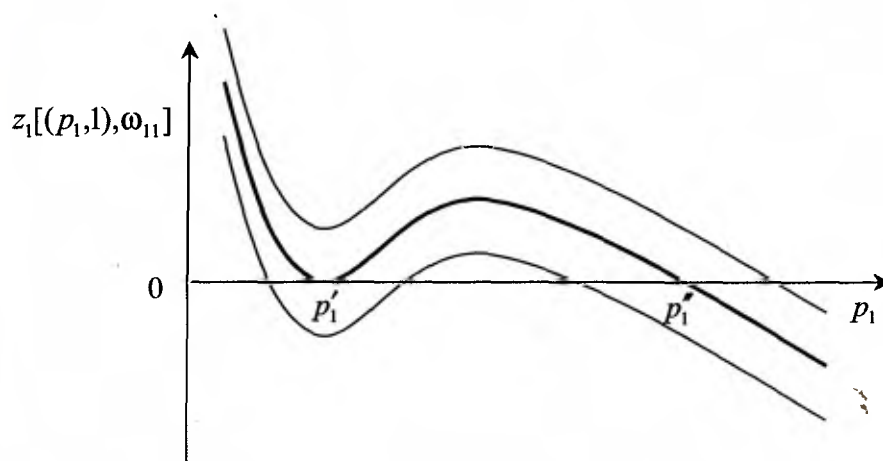


Figura III.2.3

Podemos observar que el vector de precios $(p'_1, 1)$ define un equilibrio crítico si $\tilde{\omega}_{11}$, puesto que $z_1(p'_1, \tilde{\omega}_{11}) = 0$ y $\frac{\partial z_1(p'_1, \tilde{\omega}_{11})}{\partial p_1} = 0$. Este equilibrio, sin embargo, desaparece ante un pequeño cambio en ω_{11} , o da lugar a dos equilibrios regulares. Dadas las demás dotaciones del problema, podemos notar que dos valores de ω_{11} son compatibles con un equilibrio crítico y uno regular, mientras infinitos lo son con uno o tres equilibrios regulares.

Un pequeño cambio en ω_{11} introduce una perturbación del sistema que no resisten los equilibrios críticos. En el ejemplo considerado, para cada posible ω_{11} el conjunto de precios para los cuales se cumple que $\frac{\partial z_1(p_1, \omega_{11})}{\partial p_1} = 0$ tiene dos elementos. En el caso siguiente,

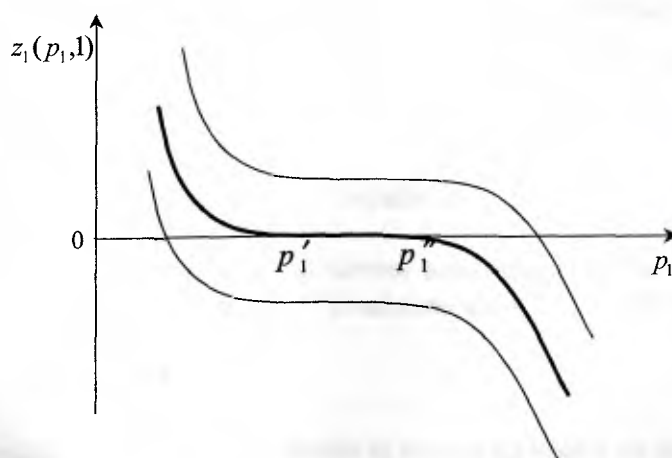


Figura III.2.4

dato ω_{11} , infinitos precios satisfacen la condición $\frac{\partial z_1(p_1, \omega_{11})}{\partial p_1} = 0$. Sin embargo, podemos notar que sólo para un valor de ω_{11} , digamos $\tilde{\omega}_{11}$, se cumplen simultáneamente $z_1(p_1, \tilde{\omega}_{11}) = 0$ y $\frac{\partial z_1(p_1, \tilde{\omega}_{11})}{\partial p_1} = 0$. En este caso, los precios $p_1 \in [p'_1, p''_1]$ definen los infinitos vectores de precios de equilibrio, $(p_1, 1)$. Notemos que un ligero cambio en ω_{11} nos lleva de infinitos equilibrios críticos a un equilibrio regular.

En los dos casos comentados, el teorema de Sard permite afirmar que, dado ω_{11} , el conjunto de imágenes de precios para los cuales se cumple $\frac{\partial z_1(p_1, \omega_{11})}{\partial p_1} = 0$ tiene medida de Lebesgue cero: siempre es posible construir una sucesión de cubos cerrados cuya unión lo contenga, tales que la suma de sus volúmenes sea menor a un ε arbitrariamente elegido. Por ello se dice que la “probabilidad” de encontrar un equilibrio crítico es cero (para una distribución normal de dimensión L), que “casi todos” los equilibrios son regulares o, también, que la propiedad de ser un equilibrio regular es genérica. Adicionalmente, el teorema de transversalidad-densidad nos permite afirmar que el conjunto de ω_{11} para los cuales se cumplen $z_1(p_1, \omega_{11}) = 0$ y $\frac{\partial z_1(p_1, \omega_{11})}{\partial p_1} = 0$ para algún p_1 , también tiene medida de Lebesgue cero. Para casi todo ω_{11} , si $z_1(p_1, \omega_{11}) = 0$, entonces $\frac{\partial z_1(p_1, \omega_{11})}{\partial p_1} \neq 0$.

Estas afirmaciones pueden extenderse a los casos de economías con L bienes. El teorema de transversalidad afirma lo siguiente: Si, cuando $\hat{z}(\bar{p}^*, \omega) = 0$, la matriz $D\hat{z}(\bar{p}^*, \omega) = [D_p \hat{z}(\bar{p}^*, \omega), D_\omega \hat{z}(\bar{p}^*, \omega)]$ tiene $L-1$ filas linealmente dependientes, también las tiene la matriz $D_p \hat{z}(\bar{p}^*, \omega)$ para casi todo ω . Esto es equivalente a probar que ambas tienen rango $L-1$. Probar que $D_\omega \hat{z}(\bar{p}^*, \omega)$ tiene rango $L-1$ basta, de acuerdo con el teorema, para probar que $D_p \hat{z}(\bar{p}^*, \omega)$ tiene rango $L-1$, es decir, que $|D\hat{z}(\bar{p}^*, \omega)| \neq 0$. Como puede recordarse, un equilibrio es regular si $|D\hat{z}(\bar{p}^*, \omega)| \neq 0$.

3. Propiedades del equilibrio en economías regulares

En esta sección se discuten las condiciones necesarias para la satisfacción de tres propiedades importantes de los equilibrios Walrasianos: existencia, unicidad y estabilidad.

a. Existencia del equilibrio Walrasiano

Existe un equilibrio Walrasiano si existe al menos un vector de precios tal que todos los agentes optimicen, los mercados se vacíen cuando los precios sean positivos y, si algunos precios son cero, la demanda de tales bienes no sea mayor que la oferta. La prueba que se presenta a continuación utiliza el teorema del punto fijo de Brouwer. Para poder

aplicarlo es necesario definir una función de ajuste de precios continua, cuyos conjuntos dominio y rango son subconjuntos de un simplex. Esta función se define partiendo de una idea sencilla: si la demanda supera la oferta de un bien, su precio relativo debe aumentar. Lo contrario debe ocurrir si la oferta supera la demanda.

La prueba que presentamos a continuación requiere de funciones de exceso de demanda continuas para todos los mercados, que se utilizan para definir la función de ajuste de precios. Aplicando el teorema del punto fijo de Brouwer, se obtiene un vector de precios que no es alterado por la función de ajuste, y para el cual, gracias a la Ley de Walras, deben vaciarse los mercados con precio positivo. Para los casos con precio cero, se prueba que la oferta es no menor que la demanda.

La prueba se presenta a continuación en once pasos.

1. La función de exceso de demanda en una economía con producción puede escribirse como

$$z(\hat{\mathbf{p}}) = \sum_i \mathbf{x}_i \left(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(\hat{\mathbf{p}}) \right) - \sum_i \boldsymbol{\omega}_i - \sum_j \mathbf{y}_j(\hat{\mathbf{p}}),$$

donde $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_L)$ es cualquier vector de precios. Sabiendo que la función es

homogénea de grado 0, podemos sustituir al vector $\hat{\mathbf{p}}$ por $\mathbf{p} = \left(\frac{\hat{p}_1}{\sum_l \hat{p}_l}, \dots, \frac{\hat{p}_L}{\sum_l \hat{p}_l} \right)$,

elemento del conjunto simplex $S = \left\{ \mathbf{p} \in R_+^L : \sum_l p_l = 1 \right\}$. Esta sustitución no afecta los precios relativos, ni las decisiones óptimas de empresas y consumidores, ni el valor de la función de exceso de demanda. Se realiza para poder utilizar el teorema del punto fijo en la prueba de existencia, como veremos más adelante.

2. Un exceso de demanda positivo para un bien sugiere un precio inferior al de equilibrio en su mercado, dados los demás precios. Un exceso de demanda negativo sugiere lo contrario. En equilibrio, cuando todos los precios se determinan simultáneamente, el exceso de demanda en todos los mercados con precios positivos debe ser cero. En equilibrio sólo puede haber mercados con exceso de demanda distinto de cero si es negativo. En este caso, el precio correspondiente debe ser cero.
3. Para probar la existencia del equilibrio, se requiere definir una función de ajuste de precios tal que tenga al menos un punto fijo. Cada punto fijo implica que, dado un vector de precios, la función no introduce cambios en él. Para definirla deben cumplirse los siguientes requisitos: dominio y rango de la función deben ser subconjuntos del simplex, la función debe ser continua y debe tener en cuenta las funciones de exceso de demanda en cada mercado. Para definir la función se siguen los siguientes pasos

- a) Se define la función $\mathbf{z}^+(\mathbf{p}) = (z_1^+(\mathbf{p}), \dots, z_L^+(\mathbf{p}))$, donde $z_i^+(\mathbf{p}) = \text{Max}\{z_i(\mathbf{p}), 0\}$. La función es continua y de valores no negativos. Nótese que la función toma el valor $z_i^+(\mathbf{p}^*) = 0$ siempre que $z_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$.
- b) La función de ajuste de precios es

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{z}^+(\mathbf{p})}{\sum_i [p_i + z_i^+(\mathbf{p})]}$$

$$= \left(\frac{p_1 + z_1^+(\mathbf{p})}{\sum_i [p_i + z_i^+(\mathbf{p})]}, \dots, \frac{p_L + z_L^+(\mathbf{p})}{\sum_i [p_i + z_i^+(\mathbf{p})]} \right)$$

El denominador es positivo, y tiene el mismo valor para cada componente de $\mathbf{f}(\mathbf{p})$. Todos los componentes son no negativos, y su suma es igual a 1. Por tanto, podemos afirmar que $\mathbf{f} : S \rightarrow S$, y que $\mathbf{f}$ es continua.

- c) Para simplificar la notación, puede escribirse $\alpha(\mathbf{p}) = \sum_i [p_i + z_i^+(\mathbf{p})]$, de modo que

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{z}^+(\mathbf{p})}{\alpha(\mathbf{p})}. \text{ Nótese que, puesto que al menos un precio debe ser positivo,}$$

$\alpha(\mathbf{p}) \in R_{++}$, y que su valor depende de $\mathbf{p}$. En equilibrio, como veremos más adelante, $\alpha(\mathbf{p}) = 1$.

4. Puesto que $\mathbf{f}$ es continua, y dominio y rango son subconjuntos del mismo simplex, $\mathbf{f}$ tiene al menos un punto fijo. Por tanto, existe al menos un $\mathbf{p}^*$ tal que $\mathbf{p}^* = \mathbf{f}(\mathbf{p}^*)$. Para cada componente de $\mathbf{f}$, entonces $p_i^* = \frac{p_i^* + z_i^+(\mathbf{p}^*)}{\alpha(\mathbf{p}^*)}$.

5. Por la ley de Walras, $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$. Por el teorema del punto fijo, debe cumplirse que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) &= \mathbf{f}(\mathbf{p}^*) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \\ &= \frac{\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) + \mathbf{z}^+(\mathbf{p}^*) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*)}{\alpha(\mathbf{p}^*)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

por lo que $\mathbf{z}^+(\mathbf{p}^*) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$. Puesto que $\mathbf{z}^+(\mathbf{p}^*) \geq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$. Esto implica que en algunos mercados los excesos de demanda son cero, y otros son negativos. Como veremos a continuación, con precio cero puede suceder cualquiera de las dos cosas. Con precio positivo, sin embargo, los excesos deben ser iguales a cero.

6. Llamaremos Caso 1 a aquel en el cual $p_l^* = 0$. Puesto que $p_l^* = \frac{p_l^* + z_l^+(\mathbf{p}^*)}{\alpha(\mathbf{p}^*)}$, entonces $z_l^+(\mathbf{p}^*) = 0$, por lo que $z_l(\mathbf{p}^*) \leq 0$. Como $p_l^* = 0$, necesariamente $\sum_{l \in \text{Caso 1}} p_l^* \cdot z_l(\mathbf{p}^*) = 0$ para cualquier valor de $\alpha(\mathbf{p})$.

7. Llamaremos Caso 2 a aquel en el cual $p_l^* > 0$. Por la Ley de Walras, se sabe que $\sum_l p_l^* \cdot z_l(\mathbf{p}^*) = 0$, por lo que $\sum_l p_l^* \cdot z_l(\mathbf{p}^*) = \sum_{l \in \text{Caso 1}} p_l^* \cdot z_l(\mathbf{p}^*) + \sum_{l \in \text{Caso 2}} p_l^* \cdot z_l(\mathbf{p}^*) = 0$. El primer sumando es cero, por lo que el segundo también debe serlo.

8. Por el teorema del punto fijo, se sabe que $(\alpha(\mathbf{p}^*) - 1) \cdot p_l^* = z_l^+(\mathbf{p}^*)$. Multiplicando ambos lados de la ecuación por el correspondiente $z_l(\mathbf{p}^*)$, y sumando todos los términos del Caso 2, se obtiene

$$(\alpha(\mathbf{p}^*) - 1) \cdot \sum_{l \in \text{Caso 2}} p_l^* \cdot z_l(\mathbf{p}^*) = \sum_{l \in \text{Caso 2}} z_l^+(\mathbf{p}^*) \cdot z_l(\mathbf{p}^*).$$

Por la Ley de Walras, esta suma debe ser igual a cero.

9. Necesariamente $z_l(\mathbf{p}^*) = z_l^+(\mathbf{p}^*) \geq 0$, puesto que si $z_l(\mathbf{p}^*) \neq z_l^+(\mathbf{p}^*)$ entonces $z_l(\mathbf{p}^*) < 0$ y, como vimos en el Caso 1, $p_l^* = 0$. Por tal razón, podemos escribir $\sum_{l \in \text{Caso 2}} z_l^+(\mathbf{p}^*) \cdot z_l(\mathbf{p}^*) = \sum_{l \in \text{Caso 2}} (z_l(\mathbf{p}^*))^2$. Por la Ley de Walras, esta suma debe ser igual a cero, lo que requiere que $z_l(\mathbf{p}^*) = 0$ para todo l .

10. En equilibrio, $\alpha(\mathbf{p}^*) = 1$. Sea $p_l^* = 0$ o $p_l^* > 0$, $z_l^+(\mathbf{p}^*) = 0$, por lo que $\alpha(\mathbf{p}^*) = \sum_l [p_l^* + z_l^+(\mathbf{p}^*)]$ se reduce a $\alpha(\mathbf{p}^*) = \sum_l p_l^* = 1$.

11. Todo vector de precios $\mathbf{p}^*$ forma parte del equilibrio porque:

- Las funciones de oferta y demanda a partir de las cuales se obtienen las funciones de exceso de demanda provienen de la solución de los problemas de optimización de empresas y consumidores.
- Un precio puede ser cero sólo si la oferta supera a la demanda de un bien.
- Si un precio es positivo, la oferta y la demanda del bien se igualan.
- La función de ajuste de precios transforma $\mathbf{p}^*$ en sí mismo, indicando que no hay razón para el cambio en los precios relativos.

Hemos probado la existencia del equilibrio Walrasiano utilizando el teorema del punto fijo de Brouwer y la ley de Walras. Para ello, debimos disponer de funciones de exceso de demanda continuas definidas de un simplex en sí mismo¹.

Para otras exposiciones, se recomiendan Arrow y Debreu (1952), Arrow y Hahn (1977), Debreu (1998), Starr (1997) y Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

b. Unicidad

En una economía regular, el número de equilibrios es impar. Una economía debe satisfacer requisitos adicionales para que podamos afirmar que el equilibrio es único. A continuación, presentaremos dos de tales condiciones: el axioma débil de la preferencia revelada para la función de exceso de demanda agregada y la sustituibilidad bruta entre bienes [ver Kehoe (1998)]. Ambas condiciones son muy estrictas, por lo que suponer que la unicidad del equilibrio Walrasiano puede ser más difícil que aceptar la multiplicidad de equilibrios.

b.1. Axioma débil de la preferencia revelada para la función de exceso de demanda agregada

La función de exceso de demanda agregada, $z(\cdot)$, satisface el axioma débil de la preferencia revelada (ADPR) si, para cualquier par $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$ tal que $\mathbf{z}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{z}(\mathbf{p}')$, se cumple que, si $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}') \leq 0$, entonces $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) > 0$.

Por la ley de Walras, sabemos que las igualdades $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ y $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}') = 0$ deben cumplirse, siempre que las restricciones presupuestarias de todos los consumidores sean satisfechas. La expresión $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}') \leq 0$ indica que las cestas de bienes que los consumidores hubieran podido adquirir con $\mathbf{p}'$ también hubieran podido adquirirla con $\mathbf{p}$. Ello implica que han preferido las cestas asociadas con $\mathbf{p}$ a las asociadas con $\mathbf{p}'$, o, abreviando, que $\mathbf{p}$ se ha revelado preferido a $\mathbf{p}'$. El ADPR exige que no pueda ocurrir lo contrario, es decir, que $\mathbf{p}'$ se revele preferido a $\mathbf{p}$. Para ello, supone que las cestas de bienes adquiribles con $\mathbf{p}'$ estén fuera del alcance de los consumidores con $\mathbf{p}$, como se establece con $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) > 0$.

El ADPR es condición necesaria para la unicidad del equilibrio en una economía de intercambio puro, o con una tecnología con rendimientos constantes a escala. Si el número de equilibrios es finito, también es una condición suficiente.

Si un equilibrio es único, entonces se satisface el ADPR. Probamos dicha afirmación en tres pasos:

¹ A partir de la función de ajuste de precios, $\mathbf{f}(\cdot)$, que permite transformar los precios ajustados en elementos de un simplex, puede obtenerse una definición alternativa del índice, para la cual el teorema comentado previamente se cumple. Según esta nueva definición, índice $(\mathbf{p}^*) = \text{sgn}(\det[\mathbf{I} - D\mathbf{f}(\mathbf{p}^*)])$.

1. Violamos el ADPR, de modo que, dados $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$, sean posibles $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}') \leq 0$ y $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) \leq 0$ con $\mathbf{z}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{z}(\mathbf{p}')$.
2. Gracias al supuesto de tecnología con rendimientos constantes a escala, podemos definir el conjunto de producción $Y^* = \{\mathbf{y} \in R^L : \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq 0 \wedge \mathbf{p}' \cdot \mathbf{y} \leq 0\}$, si suponemos que $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$ son ambos vectores de precios de equilibrio.
3. Por la definición de equilibrio presentada en esta sección, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ son vectores de precio de equilibrio. De esto se concluye que, para tener más de un equilibrio, debe violarse el ADPR.

Si se satisface el ADPR, el conjunto de vectores de precios de equilibrio es convexo. Si el conjunto es finito, tiene un único elemento.

1. Suponemos que hay dos vectores de equilibrio, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$, por lo que $\mathbf{z}(\mathbf{p}), \mathbf{z}(\mathbf{p}') \in Y$ y, para todo $\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq 0$ y $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{y} \leq 0$.
2. Deseamos probar que $\mathbf{p}'' = \alpha \mathbf{p} + (1-\alpha) \mathbf{p}'$ es un precio de equilibrio. Con respecto a $\mathbf{y} \in Y$, la prueba es inmediata: si se cumplen $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq 0$ y $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{y} \leq 0$, se cumple $\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{y} \leq 0$.
3. Falta probar que $\mathbf{z}(\mathbf{p}'') \in Y$. Por la ley de Walras, $\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}'') = 0$, lo que implica que $\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}'') = \alpha \mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}'') + (1-\alpha) \mathbf{p}' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}'') = 0$. Para que la suma sea 0, debe cumplirse que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}'') \leq 0$ o que $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}'') \leq 0$.
4. Supongamos que se cumple $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}'') \leq 0$. Puesto que $\mathbf{z}(\mathbf{p}) \in Y$, por el ADPR debe cumplirse que $\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) \leq 0$. No hay contradicción sólo si $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{z}(\mathbf{p}'')$, por lo que $\mathbf{z}(\mathbf{p}'') \in Y$. Un argumento similar se desarrolla si $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}'') \leq 0$.
5. Si el conjunto de precios de equilibrio es finito (la economía es regular), entonces $\mathbf{p}'' = \mathbf{p} = \mathbf{p}'$, y el equilibrio es único.

El ADPR puede ser fácilmente violado si las dotaciones individuales, ω_i , no son proporciones fijas del vector de dotaciones de la economía, $\bar{\omega}$, es decir, si no se cumple que $\omega_i = \alpha_i \bar{\omega}$ con $\alpha_i > 0$ y $\sum_i \alpha_i = 1$.

b.2. Sustituibilidad bruta

Dos bienes son sustitutos brutos si el incremento en el consumo de uno es acompañado por una reducción el consumo del otro. Si las funciones de demanda Marshalliana de ambos cumplen con la ley de la demanda, el incremento en el precio de uno reduce su cantidad demandada, e incrementa la del otro, *ceteris paribus*. Por ello, diremos que la función $\mathbf{z}(\cdot)$ tiene la propiedad de sustituibilidad bruta si, dados dos vectores $\mathbf{p}'$ y $\mathbf{p}$ tales que, para algún l , $p'_l > p_l$ y $p'_k = p_k$ para todo $k \neq l$, se cumple que $z_k(\mathbf{p}') > z_k(\mathbf{p})$.

Si la función $z(\cdot)$ de una economía de intercambio puro tiene la propiedad de sustituibilidad bruta, existe un único $\mathbf{p}$ normalizado que resuelve $z(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ y, por tanto, el equilibrio Walrasiano asociado es único. Probaremos dicha afirmación demostrando que, en este caso, $z(\mathbf{p}) \neq z(\mathbf{p}')$ si $\mathbf{p}'$ no puede obtenerse a partir de $\mathbf{p}$ por medio de $\mathbf{p}' = \lambda \mathbf{p}$, con $\lambda > 0$.

1. Consideraremos tres vectores de precios: $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ y $\hat{\mathbf{p}}$. Definimos $\hat{\mathbf{p}} = \alpha \mathbf{p}$, utilizando $\alpha = \frac{p'_l}{p_l} > 1$. De este modo, $\hat{p}_l = p'_l$ y $\hat{p}_k > p'_k$ para todo $k \neq l$. No existe un $\beta > 0$ tal que $\hat{\mathbf{p}} = \beta \mathbf{p}'$, ni un $\lambda > 0$ tal que $\mathbf{p}' = \lambda \mathbf{p}$.
2. Puesto que $z(\cdot)$ es homogénea de grado 0, $z(\hat{\mathbf{p}}) = z(\mathbf{p})$ y, por supuesto, $z_l(\hat{\mathbf{p}}) = z_l(\mathbf{p})$.
3. Por la afirmación anterior, $z_l(\hat{\mathbf{p}}) - z_l(\mathbf{p}) - (z_l(\mathbf{p}') - z_l(\mathbf{p})) = 0$. Si, para cada bien $k \neq l$, incrementamos el precio de p'_k a $\hat{p}_k$, por la propiedad de sustituibilidad bruta $z_l(\hat{\mathbf{p}}) - z_l(\mathbf{p}') > 0$. Ello implica que $z_l(\mathbf{p}') - z_l(\mathbf{p}) < 0$. Con esta última desigualdad probamos que $z(\mathbf{p}) \neq z(\mathbf{p}')$, por lo que es imposible hallar dos vectores de precios no colineales para los cuales el exceso de demanda sea nulo.

c. Estabilidad

Las condiciones de estabilidad que estudiaremos a continuación se vinculan de un modo que haremos explícito con la condición de estabilidad de Walras para un mercado en particular. Según esta condición, si el exceso de demanda es positivo los compradores tienden a aceptar un precio mayor, y, cuando es negativo, los vendedores tienden a aceptar un precio menor. Ello implica una relación inversa entre exceso de demanda y precio. Esta condición supone que los cambios en el precio tienden a "corregir" los excesos de demanda.

Una condición de estabilidad distinta supone que los vendedores estarán dispuestos a vender una cantidad mayor cuando el precio que los compradores quieren pagar es superior al que los vendedores aceptarían. Los compradores, por el contrario, estarían dispuestos a comprar menos. Esta condición, llamada de Marshall, supone que los cambios en cantidades tienden a igualar los precios que compradores y vendedores están dispuestos a aceptar. Las condiciones de Walras y Marshall pueden definir a un mismo equilibrio como estable o inestable. Ello ocurre cuando las funciones de demanda y oferta de un bien (suponiendo que las hay) tienen derivadas del mismo signo en el equilibrio.

El tiempo no es una variable explícita en un modelo estático, por lo que la referencia a la idea de "tendencia" para explicar su comportamiento fuera de una situación de equilibrio es imprecisa y, por tanto, de interpretación difícil. Walras utilizaba un tiempo ficticio para comentar la estabilidad del sistema: los precios son anunciados, los individuos contratan, y, si los mercados no se vacían, nuevos precios se anuncian (de acuerdo con la

condición de estabilidad de Walras) y los individuos reconstruyen. Los contratos se realizan sólo en equilibrio. ¿Quién anuncia los precios? Un ficticio subastador Walrasiano.

Consideraremos en primer lugar las condiciones de estabilidad Hicksianas, llamadas estáticas, que definen dos tipos de estabilidad: perfecta e imperfecta [ver Henderson y Quandt (1995) y Hicks (1952),].

c.1. Condiciones de estabilidad Hicksianas: Estabilidad perfecta e imperfecta

Supongamos que el bien L es tomado como numerario, y que el vector de precios de equilibrio es $\mathbf{p} = (\bar{\mathbf{p}}^*, 1)$. Tomando el diferencial total de las funciones de exceso de demanda de cada bien que componen $\hat{\mathbf{z}}: R^{L-1} \supseteq \bar{P} \rightarrow R^{L-1}$, y evaluándolo en los precios de equilibrio (excepto el de L) obtenemos

$$d\hat{\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{p}}^*) = D\hat{\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{p}}^*)d\bar{\mathbf{p}},$$

que, ecuación por ecuación, escribimos como

$$\begin{aligned} dz_1(\bar{\mathbf{p}}^*) &= \frac{\partial z_1(\bar{\mathbf{p}}^*)}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial z_1(\bar{\mathbf{p}}^*)}{\partial p_{L-1}} dp_{L-1} \\ &\vdots \\ dz_{L-1}(\bar{\mathbf{p}}^*) &= \frac{\partial z_{L-1}(\bar{\mathbf{p}}^*)}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial z_{L-1}(\bar{\mathbf{p}}^*)}{\partial p_{L-1}} dp_{L-1} \end{aligned}$$

Obsérvese que, puesto que evaluamos las derivadas en $\bar{\mathbf{p}}^*$, podemos tratarlas como si fuesen parámetros, y no funciones. Por ello, y para facilitar la lectura, escribiremos

$$b_{jk} = \frac{\partial z_j(\bar{\mathbf{p}}^*)}{\partial p_k}.$$

Las condiciones de estabilidad perfecta tienen en cuenta el efecto sobre cada función de exceso de demanda de un bien de cambios en los precios de todos los bienes. Para ello, se procede secuencialmente.

1. Suponemos que cambia el precio del bien j , manteniendo constantes todos los demás. El efecto sobre la función de exceso de demanda de dicho bien, utilizando el diferencial total, es

$$dz_j(\bar{\mathbf{p}}) = b_{jj} dp_j$$

de donde se sigue

$$\frac{dz_j(\bar{\mathbf{p}})}{dp_j} = b_{jj}.$$

Por la condición de estabilidad de Walras, debe cumplirse $b_{jj} < 0$. Al no cambiar los precios de los demás bienes, un cambio en p_j que saque del equilibrio al mercado j debe sacar del equilibrio al menos a otro mercado.

2. Suponemos que cambian los precios de los bienes j y h , manteniendo constantes todos los demás. El cambio en p_j es arbitrario. El cambio en p_h ocurre para restaurar el equilibrio en el mercado h , posiblemente perturbado por el cambio en p_j . El sistema de ecuaciones relevante en este caso es

$$\begin{aligned} dz_j(\bar{\mathbf{p}}) &= b_{jj}dp_j + b_{jh}dp_h \\ 0 &= b_{hj}dp_j + b_{hh}dp_h \end{aligned}$$

a partir del cual, aplicando la regla de Cramer, obtenemos

$$dp_j = \frac{\begin{vmatrix} dz_j(\bar{\mathbf{p}}) & b_{jh} \\ 0 & b_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}} = dz_j(\bar{\mathbf{p}}) \frac{b_{hh}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}}.$$

Por la condición de estabilidad de Walras, debe cumplirse que

$$\frac{dz_j(\bar{\mathbf{p}})}{dp_j} = \frac{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}}{b_{hh}} < 0$$

lo que implica que, necesariamente, $\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix} > 0$.

3. Suponemos que cambian los precios de los bienes j , h e i , manteniendo constantes todos los demás. El cambio en p_j es arbitrario. Los cambios en p_h y p_i ocurren para restaurar el equilibrio en los mercados h e i , posiblemente perturbados por el cambio en p_j . El sistema de ecuaciones relevante en este caso es

$$\begin{aligned} dz_j(\bar{\mathbf{p}}) &= b_{jj}dp_j + b_{jh}dp_h + b_{ji}dp_i \\ 0 &= b_{hj}dp_j + b_{hh}dp_h + b_{hi}dp_i \\ 0 &= b_{ij}dp_j + b_{ih}dp_h + b_{ii}dp_i \end{aligned}$$

a partir del cual, aplicando la regla de Cramer, obtenemos

$$dp_j = \frac{\begin{vmatrix} dz_j(\bar{p}) & b_{jh} & b_{ji} \\ 0 & b_{hh} & b_{hi} \\ 0 & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}}$$

Por la condición de estabilidad de Walras, debe cumplirse que

$$\frac{dz_j(\bar{p})}{dp_j} = \frac{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}} < 0$$

lo que implica que, necesariamente, $\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix} < 0$.

4. Continuando con el procedimiento descrito, podemos verificar que las condiciones Hicksianas de estabilidad perfecta implican alternancia en los signos de los determinantes:

$$b_{jj} < 0, \quad \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix} < 0, \dots$$

Las condiciones Hicksianas de estabilidad perfecta requieren la estabilidad aislada de cada mercado. Sin embargo, aun cuando cada mercado no sea estable, se dice que el sistema en bloque es imperfectamente estable si

$$\frac{dz_j(\bar{p})}{dp_j} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,L-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{L-1,1} & \cdots & b_{L-1,L-1} \end{vmatrix}}{|M_{jj}|} < 0$$

siendo M_{jj} el menor (principal) de b_{jj} , obtenido eliminando la fila j y la columna j de la matriz $D\hat{z}(\bar{p}^*)$.

Para una economía con dos bienes podemos ilustrar las condiciones estáticas de estabilidad.

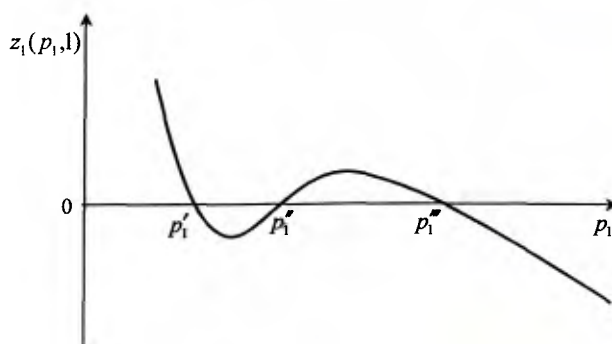


Figura III.3.1

Puesto que $\frac{\partial z_1(p'_1)}{\partial p_1} < 0$ y $\frac{\partial z_1(p''_1)}{\partial p_1} < 0$, podemos afirmar que los vectores de precios $(p'_1, 1)$ y $(p''_1, 1)$ son de equilibrio estable. Puesto que $\frac{\partial z_1(p'''_1)}{\partial p_1} > 0$, el vector $(p'''_1, 1)$ es de equilibrio inestable.

c.2. *Tâtonnement*

Walras (1987) utilizó el verbo *tâter*, tantear, para referirse a sus condiciones de estabilidad. A continuación presentaremos dichas condiciones utilizando tiempo continuo [ver Samuelson (1957)]. Henderson y Quandt (1995) se refieren a ellas como a condiciones de estabilidad dinámica. Sin embargo, debe recordarse que el tiempo es ficticio en un modelo estático.

Expresaremos la condición de estabilidad de Walras para cada mercado por separado utilizando el sistema de $(L - 1)$ ecuaciones diferenciales

$$\frac{dp_l}{dt} = z_l(p_2, \dots, p_L) \quad l = 2, \dots, L$$

La función de exceso de demanda para cada l no necesariamente es lineal. Sin embargo, puesto que la solución para un sistema de ecuaciones diferenciales *lineales* es la más fácil, buscaremos una solución por medio de una *aproximación lineal* a la función de exceso. Para ello, obtenemos el diferencial total de la función de exceso, y notamos que

$$\Delta z_l \approx dz_l = \sum_{k=2}^L \frac{\partial z_l}{\partial p_k} dp_k \approx \sum_{k=2}^L \frac{\partial z_l}{\partial p_k} \Delta p_k \quad l = 2, \dots, L$$

Como estamos estudiando la estabilidad del equilibrio, debemos conocer, necesariamente, al vector de precios de equilibrio. Si evaluamos las derivadas de los excesos en el vector de precios de equilibrio, obtendremos los *valores* de tales derivadas en el equilibrio, a los que daremos el nombre de b_{lk} :

$$\frac{\partial z_l}{\partial p_k}(p_{2e}, \dots, p_{Le}) \equiv b_{lk} \quad l = 2, \dots, L$$

Y, como ya hemos estudiado, todas las funciones de exceso tomarán el valor 0 si las evaluamos en dicho vector. Así, podríamos sugerir

$$\Delta z_l = z_l - z_{le} = z_l \quad \text{y} \quad \Delta p_l = p_l - p_{le} \quad l = 2, \dots, L$$

de modo que pueda obtenerse la aproximación

$$\frac{dp_l}{dt} \approx \sum_{k=2}^L b_{lk} p_k + c_l \quad l = 2, \dots, L$$

donde

$$c_l = - \sum_{k=2}^L b_{lk} p_{ke} \quad l = 2, \dots, L$$

Aceptemos que este sistema será el que podremos resolver, y, despreciando el error, substituyamos el símbolo " $\approx$ " por " $=$ ". Para facilitarnos la solución del sistema, escribámosle utilizando notación matricial

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{dp_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dp_L}{dt} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_2 \\ \vdots \\ p_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} p_{2e} \\ \vdots \\ p_{Le} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{L2} & \cdots & b_{LL} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_2 \\ \vdots \\ c_L \end{bmatrix} = -\mathbf{B}\mathbf{p}_e$$

de modo que nuestro sistema a resolver sería

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{c}$$

Este es sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, no homogéneo y con coeficientes y término constantes. Sería fácil de resolver si la matriz $\mathbf{B}$ fuera una matriz diagonal. Por ejemplo, si $L = 3$ y $\mathbf{B}$ es diagonal, el sistema sería

$$\begin{bmatrix} \frac{dp_2}{dt} \\ \frac{dp_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{22} & 0 \\ 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$\begin{cases} \frac{dp_2}{dt} = b_{22}p_2 + c_2 \\ \frac{dp_3}{dt} = b_{33}p_3 + c_3 \end{cases}$$

Puesto que la ecuación para $\frac{dp_2}{dt}$ no depende de p_3 , y que la ecuación para $\frac{dp_3}{dt}$ no depende de p_2 , se dice que las ecuaciones del sistema no están *vinculadas*, por lo que cada ecuación puede resolverse por separado.

No todos los sistemas posibles son como este, por supuesto. Sin embargo, todos los sistemas como este pueden resolverse ecuación por ecuación. Por eso vamos a establecer un método que permita resolver cualquier sistema lineal indirectamente, utilizando primero un sistema relacionado con ecuaciones no vinculadas [ver Boyce y Di Prima. (1984)].

La idea es la siguiente: nos interesa resolver el sistema $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{c}$, en el cual $\mathbf{B}$ no es diagonal, y no sabemos cómo. Sin embargo, sí sabríamos resolver otro sistema, por ejemplo $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{h}$, en el cual $\mathbf{D}$ fuese diagonal. Por ello, intentaremos usar lo que sabemos para resolver lo que no sabemos. Para ello, buscaremos el modo de *diagonalizar* la matriz de coeficientes $\mathbf{B}$, es decir, de encontrar una matriz cuadrada $\mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{D}$$

siendo $\mathbf{D}$ una matriz diagonal,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_L \end{bmatrix}.$$

Cómo encontrar $\mathbf{V}$ lo discutiremos en un momento. Antes supongamos que ya la tenemos: ¿cómo la usaremos? El vector $\mathbf{p}$ puede escribirse en términos de la matriz $\mathbf{V}$, premultiplicando otro vector, digamos $\mathbf{u}$, por $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{V}\mathbf{u}$$

Recuérdese que $\mathbf{p}$ es un vector de funciones del tiempo. $\mathbf{V}$ es una matriz que permite diagonalizar una matriz de coeficientes constantes, por lo que debe ser una matriz de constantes. Necesariamente, $\mathbf{u}$ debe ser un vector de funciones del tiempo, derivables con respecto a t . Conocidos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{V}$, conocemos $\mathbf{u}$. Por ello, podemos escribir $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{c}$ como

$$\mathbf{V}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B}(\mathbf{V}\mathbf{u}) + \mathbf{c}$$

Premultiplicando ambos lados de la ecuación por $\mathbf{V}^{-1}$ obtenemos el sistema

$$\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V})\mathbf{u} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{c}$$

que puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{h}$$

donde $\mathbf{h} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{c}$ es un vector de constantes.

Sabemos que podemos resolver este sistema ecuación por ecuación, puesto que no están vinculadas. También sabemos que no hemos hecho todo esto por $\mathbf{u}$, sino por $\mathbf{p}$. Así que la solución que buscamos la hallaremos al premultiplicar de nuevo $\mathbf{u}$ por $\mathbf{V}$.

Ahora bien, ¿cómo encontramos $\mathbf{V}$? Recordemos que, si la matriz $\mathbf{B}$ es diagonalizable, entonces es posible hallar una matriz $\mathbf{V}$ tal que $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{D}$. Sin embargo, aun no conocemos $\mathbf{V}$ y, por tanto, tampoco $\mathbf{D}$. Para ilustrar el modo de resolver este problema, consideremos el caso en el cual $L = 3$. Premultipliquemos por $\mathbf{V}$ ambos lados de $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{D}$, de modo que

$$\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{D}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23} \\ v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_2 v_{22} & \lambda_3 v_{23} \\ \lambda_2 v_{23} & \lambda_3 v_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y observemos que esto mismo podemos escribirlo del siguiente modo

$$\mathbf{B}[\mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = [\lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad \lambda_3 \mathbf{v}_3]$$

si escribimos

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23} \\ v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3],$$

donde

$$\mathbf{v}_l = \begin{bmatrix} v_{l2} \\ v_{l3} \end{bmatrix} \quad l = 2, 3.$$

Para que dos matrices sean iguales, cada uno de los elementos que las componen deben ser iguales entre sí. Por ello, debe ser cierto que

$$\mathbf{B}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad \text{y que} \quad \mathbf{B}\mathbf{v}_3 = \lambda_3 \mathbf{v}_3.$$

Observemos que aun no conocemos ni los $\mathbf{v}_l$ ni los λ_l . Sin embargo, hay un modo de determinar primero los valores de los λ_l , para luego asignar a cada λ_l uno de los posibles vectores $\mathbf{v}_l$ que pueden calcularse. Lo que vamos a hacer es lo siguiente: nos vamos a preguntar primero cuáles son los valores de la variable escalar λ para los cuales se puede resolver

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

lo que puede escribirse como

$$\mathbf{B}\mathbf{v} - \lambda \mathbf{I}\mathbf{v} = (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. La solución de esta ecuación será diferente de cero sólo si

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Los valores de λ que satisfacen la ecuación anterior, llamada *ecuación característica* de $\mathbf{B}$, son llamados *autovalores*, *valores propios*, o *característicos*, de $\mathbf{B}$. Pueden hallarse sin conocer los vectores $\mathbf{v}_j$. Volvamos al caso en el que $L=3$. Sabemos que

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (b_{22} + b_{33})\lambda + (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}).$$

Notemos que este determinante nos conduce a un polinomio de grado 2, que tiene, por tanto, dos raíces. Si el determinante fuese de una matriz de orden $L-1$, el polinomio sería de grado $L-1$, y tendríamos $L-1$ raíces. Podemos escribir la ecuación característica de un modo más breve como

$$\lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_0 = 0$$

$$\text{si llamamos } \beta_1 \equiv -(b_{22} + b_{33}) \text{ y } \beta_0 \equiv b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}.$$

Sabemos que, para resolver una ecuación como esta usamos las expresiones

$$\lambda_2 = \frac{-\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_3 = \frac{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0}}{2}$$

que pueden conducir a raíces reales iguales, reales diferentes o complejas. Una vez halladas las raíces, que son los autovalores, pueden resolverse las ecuaciones

$$(\mathbf{B} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad (\mathbf{B} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

para $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, que serán llamados *autovectores* correspondientes a λ_2 y λ_3 , respectivamente. Puesto que hay infinitos de estos vectores, suele elegirse una pareja de vectores “normalizados”: aquella para la cual se satisfacen las ecuaciones $\mathbf{v}_2' \mathbf{v}_2 = 1$ y $\mathbf{v}_3' \mathbf{v}_3 = 1$.

Ya tenemos la matriz $\mathbf{V}$, cuyas columnas son, precisamente, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. También tenemos los elementos de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{D}$, que son los autovalores, λ_2 y λ_3 . Recuerdese que lo que nos ha hecho estudiar todo esto es nuestro deseo de resolver

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{c}$$

a través de

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{h},$$

siendo $\mathbf{p} = \mathbf{V}\mathbf{u}$, $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{D}$ y $\mathbf{h} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{c}$. Ya, por tanto, lo tenemos todo. Sabemos que el sistema $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{h}$ se construyó de modo que las ecuaciones no estuvieran vinculadas, de modo que pudieran resolverse cada una por separado. Y sabemos que las ecuaciones diferenciales no homogéneas se resuelven sumando a la solución general de la ecuación homogénea asociada una solución particular de la ecuación no homogénea. Podríamos proceder de este modo y, una vez hallada $\mathbf{u}$, encontrar $\mathbf{p}$.

Supongamos que $L=3$. El sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix} \frac{du_2}{dt} \\ \frac{du_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = \lambda_2 u_2 + h_2 \\ \frac{du_3}{dt} = \lambda_3 u_3 + h_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23} \\ v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23} \\ v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 e^{\lambda_2} \\ A_3 e^{\lambda_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23} \\ v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h_2}{\lambda_2} \\ \frac{h_3}{\lambda_3} \end{bmatrix}$$

En general, podemos observar lo siguiente: la solución particular para el sistema no homogéneo

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{h},$$

suponiendo que $\mathbf{u}$ es constante, es

$$\mathbf{u}_p = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{h}.$$

Puesto que $\mathbf{h} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{c}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{B}\mathbf{p}_e$ y $\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V}$, podemos afirmar que

$$\mathbf{u}_p = -(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}) [\mathbf{V}^{-1}(-\mathbf{B}\mathbf{p}_e)] = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{p}_e$$

Por otra parte, la solución general del sistema homogéneo asociado tendría la forma

$$\mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} A_2 e^{\lambda_2} \\ \vdots \\ A_L e^{\lambda_L} \end{bmatrix}$$

Así, la solución general del sistema no homogéneo sería

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} A_2 e^{\lambda_2} \\ \vdots \\ A_L e^{\lambda_L} \end{bmatrix} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{p}_e$$

Multiplicando por $\mathbf{V}$, obtenemos la solución del sistema de nuestro interés

$$\mathbf{p} = \mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} A_2 e^{\lambda_2} \\ \vdots \\ A_L e^{\lambda_L} \end{bmatrix} + \mathbf{p}_e$$

Para que un equilibrio sea estable, λ_l debe ser negativo para $l = 2, \dots, L$, o, de ser un número complejo, su parte real debe ser negativa.

Aun cuando la estabilidad Hicksiana no es condición necesaria ni suficiente para la estabilidad dinámica, puede probarse que un equilibrio es estable en ambos sentidos si

todos los bienes son sustitutos brutos. También puede probarse que un equilibrio es estable si la función de exceso de demanda agregada satisface el axioma débil de la preferencia revelada (ADPR).

Por el teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu, sabemos que es posible obtener una economía con tantos consumidores como bienes para cualquier función de exceso de demanda agregada que satisfaga unas pocas condiciones. Podemos definir una economía con equilibrios múltiples. Y no necesariamente estables.

4. Equilibrio Walrasiano y óptimo de Pareto

El conjunto de asignaciones factibles es

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_I, y_1, \dots, y_J) \in X_1 \times \dots \times X_I \times Y_1 \times \dots \times Y_J : \sum_i x_i = \sum_j y_j + \sum_i \omega_i \right\} \subset R^{L(I+J)}$$

Una asignación $(x', y') \in A$ es Pareto superior a la asignación $(x, y) \in A$ si $x'_i \succeq_i x_i$ para todo i y, para al menos un i , $x'_i \succ_i x_i$. Una asignación $(x, y) \in A$ es un óptimo de Pareto, Pareto óptima, o Pareto eficiente, si no existe asignación $(x', y') \in A$ Pareto superior a $(x, y) \in A$.

Notemos lo siguiente. La definición de óptimo de Pareto hace referencia a vectores de precios. Es independiente de la definición de equilibrio Walrasiano. Sin embargo, bajo ciertas circunstancias es posible demostrar que un equilibrio Walrasiano es Pareto óptimo, y que un óptimo de Pareto puede ser "soportado" por un vector de precios, constituyendo ambos un equilibrio Walrasiano. Ambas afirmaciones son conocidas como los teoremas del bienestar, que presentaremos a continuación [ver Debreu (1953a), Hammond (1998), Kreps (1990) y Mas-Colell, Whinston y Green (1995)].

a. Primer teorema del bienestar

El primer teorema del bienestar demuestra que todo equilibrio Walrasiano es un óptimo de Pareto. En la prueba suponemos la existencia de un equilibrio Walrasiano. El único requisito impuesto sobre las preferencias es el de insaciabilidad local.

La prueba procede por contradicción. En primer lugar, se supone que existe una asignación Pareto superior factible a la asignación definida por el equilibrio. Este supuesto implica que la suma de los gastos de los consumidores exceda la de sus riquezas, por lo que la supuesta asignación Pareto superior no es factible.

La prueba se presenta en siete pasos.

1. Sea el punto (x^*, y^*, p) un equilibrio Walrasiano, con $(w_1, \dots, w_I)$ como vector de niveles individuales de riqueza.

2. Suponga que existe una asignación factible (x, y) que sea Pareto superior a (x^*, y^*) .
3. Si (x, y) es Pareto superior a (x^*, y^*) , entonces para todo i $x_i \succeq_i x_i^*$ y, al menos para un i , $x_i \succ_i x_i^*$.
4. Suponiendo que (x^*, y^*, p) es un equilibrio Walrasiano, cuando $x_i \succeq_i x_i^*$, entonces $p \cdot x_i \geq w_i$, y cuando $x_i \succ_i x_i^*$, entonces $p \cdot x_i > w_i$.
5. Si (x, y) es Pareto superior a (x^*, y^*) , y (x^*, y^*, p) es un equilibrio, entonces $\sum_i p \cdot x_i > \sum_i w_i$.
6. Si (x^*, y^*, p) es un equilibrio, $\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^* \geq p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$.
7. Suponer que (x^*, y^*, p) es un equilibrio Walrasiano, y que (x, y) es Pareto superior a (x^*, y^*) , es contradictorio: por lo que hemos visto hasta ahora, se sigue que (x, y) no es factible. Como $\sum_i p \cdot x_i > p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$, por los pasos 5 y 6, se deduce que $\sum_i x_i > \bar{\omega} + \sum_j y_j$. Por tanto, si (x^*, y^*, p) es un equilibrio Walrasiano, no existe una asignación factible (x, y) Pareto superior a (x^*, y^*) . Ello implica que (x^*, y^*) es un óptimo de Pareto.

b. Segundo teorema del bienestar

El segundo teorema del bienestar demuestra que, bajo ciertas circunstancias, un óptimo de Pareto es también un equilibrio Walrasiano. Puesto que la prueba utiliza el teorema del hiperplano separador, es necesario suponer preferencias convexas para los consumidores y conjuntos de posibilidades de producción convexas para las empresas. Además, es necesario suponer que todos los consumidores tienen preferencias localmente insaciabiles, una riqueza positiva, y que siempre pueden comprar una cesta que implique gastar menos que su riqueza.

La prueba del segundo teorema requiere definir en primer lugar dos conjuntos convexas disjuntos, sobre los que pueda aplicarse el teorema del hiperplano separador. Uno, es el conjunto de la suma de todas las cestas estrictamente preferidas por los consumidores a las que les corresponden en la asignación óptimo de Pareto. El otro es el conjunto de la suma de todos los bienes que pueden destinarse al consumo, sean producidos o sean parte de las dotaciones de los consumidores. Una vez aplicado el teorema del hiperplano separador, y suponiendo riqueza positiva para todos los consumidores, se prueba que las empresas y los consumidores maximizan sus funciones objetivo en el óptimo de Pareto, tomando como vector de precios el que define el hiperplano. Con ello se prueba que el óptimo de Pareto, en estas circunstancias, es un equilibrio Walrasiano.

La prueba se presenta en diez pasos.

1. Sea $V_i = \{x_i \in X_i : x_i \succ_i x_i^*\}$ el conjunto de cestas de consumo estrictamente preferidas por el consumidor i a la asignación x_i^* . Si $\succeq_i$ es convexa, entonces V_i es convexo para todo i : toda combinación convexa de dos elementos de V_i pertenece a V_i . Para probarlo, note que, de $x_i \succeq_i x'_i \succ_i x_i$, se sigue $\alpha x_i + (1-\alpha)x'_i \succeq_i x'_i \succ_i x_i^*$ bajo el supuesto de convexidad de las preferencias. En este caso, $\alpha \in [0,1]$.
2. Sea $V = \sum_i V_i = \left\{ \sum_i x_i \in R^L : x_i \in V_i, \dots, x_i \in V_i \right\}$ el conjunto agregado de cestas de consumo estrictamente preferidas por cada consumidor i a su correspondiente asignación x_i^* . Puesto que los V_i son convexos, su suma también lo es.
3. Sea $Y = \sum_j Y_j = \left\{ \sum_j y_j \in R^L : y_j \in Y_j, \dots, y_j \in Y_j \right\}$ el conjunto agregado de planes de producción. Sumando a Y el conjunto de dotaciones, $\{\bar{\omega}\}$, se obtiene el conjunto de todas las cestas producibles, $Y + \{\bar{\omega}\}$, que se destinan al consumo. Para poder aplicar el teorema del hiperplano separador, se requiere que este conjunto sea convexo. Para ello, basta suponer que cada Y_j es convexo.
4. Si (x^*, y^*) es óptimo de Pareto, entonces $V \cap (Y + \{\bar{\omega}\}) = \emptyset$. De no ser así, sería factible producir una asignación estrictamente preferida a x^* por todos los consumidores.
5. Por el teorema del hiperplano separador, es posible afirmar que existen un vector $p = (p_1, \dots, p_L) \neq 0$ y un número $r \in R$ tales que $p \cdot z \geq r$ para todo $z = \sum_i x_i \in V$, y $p \cdot z \leq r$ para todo $z = \left(\sum_j y_j + \bar{\omega} \right) \in Y + \{\bar{\omega}\}$.
6. Si las preferencias son localmente insaciabiles, siempre es posible encontrar un $\hat{x}_i \succ_i x_i \succeq_i x_i^*$ arbitrariamente cerca de cualquier x_i . Por tanto, es posible definir una sucesión que converja a x_i tal que todos sus elementos pertenezcan a V_i y, por tanto, $\sum_i \hat{x}_i \in V$. Si $\hat{x}_i \rightarrow x_i$, entonces $p \cdot \sum_i \hat{x}_i \rightarrow p \cdot \sum_i x_i \geq r$. Cuando $x_i = x_i^*$, se cumple que $p \cdot \sum_i x_i^* \geq r$.

7. Si $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ es óptimo de Pareto, debe cumplirse que $\sum_i \mathbf{x}_i^* = \sum_j \mathbf{y}_j^* + \bar{\omega}$. Por el teorema

del hiperplano separador, $\mathbf{p} \cdot \left(\sum_j \mathbf{y}_j^* + \bar{\omega} \right) \leq r$, por lo que se cumple

$$r \leq \mathbf{p} \cdot \sum_i \mathbf{x}_i^* = \mathbf{p} \cdot \left(\sum_j \mathbf{y}_j^* + \bar{\omega} \right) \leq r \text{ sólo si } \mathbf{p} \cdot \sum_i \mathbf{x}_i^* = \mathbf{p} \cdot \left(\sum_j \mathbf{y}_j^* + \bar{\omega} \right) = r.$$

8. Un equilibrio puede tenerse sólo si empresas y consumidores maximizan sus funciones objetivo, dadas sus restricciones. Consideremos primero la maximización del beneficio de las empresas. Por el teorema del hiperplano separador sabemos que, para todo $\mathbf{y}_j \in Y_j$,

$$\mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{y}_j + \sum_{h \neq j} \mathbf{y}_h^* + \bar{\omega} \right) \leq r = \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{y}_j^* + \sum_{h \neq j} \mathbf{y}_h^* + \bar{\omega} \right)$$

por lo que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^*$. Ello implica que ninguna empresa puede incrementar su beneficio si cambia su plan de producción, dados los planes de producción de las demás empresas según el óptimo de Pareto.

9. Para que cada individuo pueda pagar su parte en la asignación $\mathbf{x}^*$, su riqueza, w_i , debe ser igual al gasto $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i^*$. Si $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{p})$ es un equilibrio, ningún consumidor puede pagar una cesta estrictamente preferida a la que le corresponda por $\mathbf{x}^*$. El teorema del hiperplano separador permite verificar que parte de lo afirmado se cumple con lo que se ha presentado hasta aquí. En efecto,

$$\mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{x}_i + \sum_{k \neq i} \mathbf{x}_k^* \right) \geq r = \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{x}_i^* + \sum_{k \neq i} \mathbf{x}_k^* \right)$$

de donde se sigue que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i \geq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i^* = w_i$. Esto implica que ninguna cesta estrictamente preferida a $\mathbf{x}_i^*$ es más barata que $\mathbf{x}_i^*$.

10. Sólo falta probar que cualquier cesta estrictamente preferida a $\mathbf{x}_i^*$ es más costosa que $\mathbf{x}_i^*$. La prueba requiere que exista un $\mathbf{x}_i'$ tal que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i' < w_i$, es decir, que cada individuo pueda gastar menos que su riqueza y adquirir una cesta de consumo a los precios $\mathbf{p}$. Por el teorema del hiperplano separador, se sabe que es posible que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i = w_i$ para $\mathbf{x}_i \succ_i \mathbf{x}_i^*$. Por los supuestos de convexidad e insaciabilidad local de las preferencias, se sabe que es posible obtener, con $\alpha \in [0,1)$, una combinación convexa de $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_i'$ que sea estrictamente preferida a $\mathbf{x}_i^*$ y que cueste menos a los precios $\mathbf{p}$. Para que $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{p})$ sea un equilibrio, esto no debe ocurrir, por lo que si $\mathbf{x}_i \succ_i \mathbf{x}_i^*$ entonces $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i > w_i$.

Para una economía a la Robinson Crusoe, con una única empresa propiedad de un único consumidor, podemos ilustrar los argumentos presentados con el siguiente gráfico

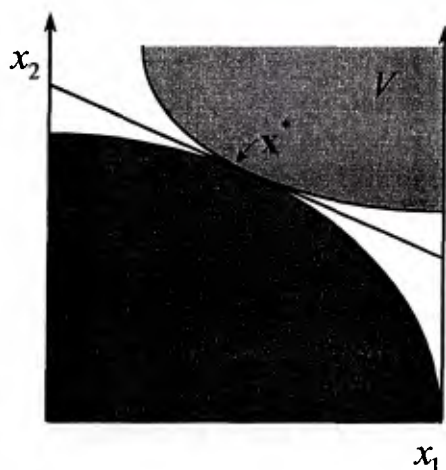


Figura III.4.1

c. Importancia y limitaciones de los teoremas del bienestar

Los teoremas del bienestar han servido de apoyo a posiciones políticas extremas: los defensores del libre mercado recurren al primero, y los convencidos del socialismo de mercado al segundo. Sin embargo, dichos teoremas sólo son demostrables bajo supuestos muy restrictivos. Los teoremas de Greenwald y Stiglitz sobre la eficiencia de los mercados competitivos, y otros teoremas relacionados comentados por Stiglitz (1994), permiten obtener resultados diferentes a los comentados en esta sección introduciendo los supuestos de información imperfecta y mercados incompletos. Por ejemplo, la desigualdad entre oferta y demanda puede no tender a desaparecer, pudiendo caracterizar un “equilibrio” competitivo distinto del definido. En algunos casos, es posible que un gobierno pueda “mejorar” un resultado de equilibrio. En otros, es imposible descentralizar la eficientemente la economía.

Los teoremas del bienestar presentan argumentos a favor de los mercados como modos de asignación óptimos en un modelo estático, sin bienes públicos, externalidades ni incertidumbre. Extender dichos argumentos a tales situaciones les debilita considerablemente [ver Hammond (1998), Hens (1998) y Salanié (2000)].

5. Resumen

La teoría estática del equilibrio general cuenta con pruebas de existencia y finitud de equilibrios para economías regulares. Sin embargo, para cualquier conjunto imaginable de equilibrios es posible definir una economía tal que sus funciones de exceso de demanda permitan obtener tal conjunto de equilibrio. Ello es lo que afirma el teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu. Por ello, una economía con un equilibrio único y estable debe satisfacer condiciones adicionales, no necesariamente sostenibles en modelos deseablemente generales.

Una vez probada la existencia de equilibrio Walrasiano, puede probarse que dicho equilibrio es, bajo ciertas condiciones, un óptimo de Pareto. Bajo condiciones más estrictas, puede probarse que un óptimo de Pareto es un equilibrio Walrasiano. Estos resultados, llamados teoremas fundamentales del bienestar, han tenido gran importancia en la justificación teórica de regímenes tan diferentes como el libre mercado y el socialismo de mercado.

IV. Equilibrio general estático con incertidumbre

Introducción

Para representar la incertidumbre, Savage (1972, pág. 9) propuso una “nomenclatura (...) breve, sugestiva y en razonable armonía con los usos de la estadística y el discurso ordinario”. Tal nomenclatura introdujo los términos de mundo, estado del mundo y verdadero estado del mundo. El mundo es el objeto que interesa al individuo. El estado del mundo es una descripción del mundo, que no deja ningún aspecto relevante sin describir. Un conjunto de estados es llamado evento, y el conjunto de todos los estados, llamado evento universal, es el mundo. El verdadero estado del mundo es el estado que de hecho se obtiene, por lo que se dice que es la verdadera descripción del mundo. Suele decirse que la naturaleza “elige” el verdadero estado del mundo.

En este Capítulo, presentaremos una economía en donde hay I consumidores, J empresas, L bienes físicos y S estados del mundo (o de la naturaleza). Las preferencias, las dotaciones y la tecnología dependen del estado del mundo. Supondremos que el evento universal es finito, y conocido por todos los agentes, y diremos que la incertidumbre se resuelve cuando la naturaleza elige el verdadero estado del mundo y lo hace del conocimiento de consumidores y empresas.

Antes de resolverse la incertidumbre, consumidores y empresas deben resolver sus problemas de elección de modo que obtengan (respectivamente) planes de consumo y producción contingentes, que sean óptimos en cada estado del mundo. Las consecuencias de las decisiones individuales quedan completamente determinadas para cada estado del mundo. Sin embargo, sólo se conocen las que efectivamente afectarán a los agentes una vez que se resuelva la incertidumbre, es decir, se revele la “elección” de la naturaleza. Conviene destacar que consideramos dos períodos con respecto a la resolución de la incertidumbre: *ex ante*, cuando los agentes deciden sin conocer el estado del mundo, y *ex post*, cuando se revela el estado del mundo y los agentes reciben las consecuencias de sus decisiones. Ello nos permitirá considerar dos tipos de mercado: mercados *forward* y mercados *spot*¹. En los mercados *forward*, los agentes aceptan contratos de compra o venta de una cantidad específica de una mercancía a un precio específico (llamado precio *forward*), en un estado de la naturaleza específico y en un momento específico del futuro. En este Capítulo, cuando los contratos se aceptan *ex ante* y se realizan *ex post*, diremos que los mercados son *forward*. Los mercados para los cuales aceptar y realizar el contrato ocurre en el mismo momento del tiempo son llamados mercados *spot*.

¹ Las palabras *future* y *current* existen en inglés, con significados muy precisos en finanzas [ver Luenberger, (1998)]. Por eso he preferido no traducir *forward* y *spot* como futuros y corrientes.

En este Capítulo, estudiaremos fundamentalmente los equilibrios Arrow-Debreu (para cuya definición se utilizan únicamente mercados *forward*) y Radner (cuya definición requiere de un mercado *forward* y varios mercados *spot*, abiertos *ex post*), correspondientes a economías de intercambio puro con mercados completos. Veremos que ambos equilibrios son equivalentes, y que en ambos se cumplen teoremas del bienestar.

Con respecto a la notación, conviene añadir algunas frases. Consideraremos una economía en donde hay I consumidores, J empresas, L bienes físicos y S estados del mundo. Utilizaremos su número de elementos (su cardinal) como nombre de cada conjunto. Así, por ejemplo, al escribir $i \in I$ debe entenderse que i es un consumidor, y que el conjunto de consumidores es finito y tiene I elementos.

Para estudiar los temas desarrollados a continuación, se recomiendan Laffont (1991), Mas-Colell, Whinston y Green. (1995) y Villar (2001). Para temas adicionales ver Debreu (1953b y 1987), Duffie (2001) y Hens (1998).

1. Consumidores y empresas en una economía Arrow-Debreu

En esta sección se presentan los problemas de elección de consumidores y empresas, definidos sobre un conjunto de mercancías contingentes. Además, se define el equilibrio Arrow-Debreu, y se le compara con el equilibrio Walrasiano discutido en el Capítulo anterior..

a. El problema del consumidor

Cada consumidor $i \in I$ tiene un conjunto de elección, que llamaremos X_i . Sus elementos son llamados *vectores de mercancías contingentes para cada estado del mundo*, y se denotan como

$$\mathbf{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{Li}, \dots, x_{1Si}, \dots, x_{LSi}) \in X_i \subset R^{LS},$$

donde $x_{lsi} > 0$ es un título que da al consumidor i derecho a recibir una unidad del bien l en el estado s , y nada en cualquier otro estado. Por supuesto, si $x_{lsi} < 0$, el título le obliga a entregar una unidad del bien l en el estado s , y nada en cualquier otro estado.

Se supone que X_i es un conjunto ordenado por una relación de preferencias, que todos los consumidores disponen de la misma distribución de probabilidad sobre los estados del mundo, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_S)$, y que hay una función de utilidad de Bernoulli para cada consumidor en cada estado, $u_{si}(\mathbf{x}_{si}) = u_{si}(x_{1si}, \dots, x_{Lsi})$. Gracias a ello, puede utilizarse la función de utilidad von Neumann y Morgenstern para representar la relación de preferencias del consumidor i :

$$\mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{x}'_i \Leftrightarrow \sum_s \pi_s u_{si}(x_{1si}, \dots, x_{Lsi}) \geq \sum_s \pi_s u_{si}(x'_{1si}, \dots, x'_{Lsi})$$

Al suponer dada $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_S)$, el valor de la utilidad del consumidor depende sólo de $\mathbf{x}_i$. Por ello, suele escribirse

$$U_i(\mathbf{x}_i) = U_i(\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{Si}) = \sum_s \pi_s u_{si}(x_{1si}, \dots, x_{Lsi}).$$

Cada consumidor i tiene *ex ante* un conjunto de alternativas accesibles, que llamaremos conjunto presupuestario y denotaremos B_i . Para definirlo, debemos considerar las fuentes de recursos de los consumidores: su dotación de bienes físicos y su participación en la propiedad de las empresas. Comencemos con el vector de dotaciones contingente para cada estado, que denotamos como

$$\omega_i = (\omega_{1i}, \dots, \omega_{Li}, \dots, \omega_{1Si}, \dots, \omega_{LSi}) \in R^{LS}$$

donde $\omega_{si} \geq 0$ indica la cantidad que el consumidor i recibiría del bien l en el estado s . Antes de resolverse la incertidumbre, cada consumidor puede vender toda su dotación al vector de precios

$$\mathbf{p} = (p_{11}, \dots, p_{L1}, \dots, p_{1S}, \dots, p_{LS}) \in R^{LS}$$

recibiendo *ex ante* el valor $\mathbf{p} \cdot \omega_i$ con el compromiso de entregar *ex post* únicamente el vector

$$\omega_s = (\omega_{1si}, \dots, \omega_{Lsi}) \in R^L,$$

cuando se revele el estado del mundo s .

Con respecto a la propiedad de las empresas, supondremos que cada consumidor i posee una participación $\theta_{ji} \in [0,1]$ en cada empresa j , y que cada empresa pertenece por completo a los consumidores, cumpliéndose que $\sum_i \theta_{ji} = 1$. Por lo que hemos dicho, podemos notar que el conjunto presupuestario *ex ante* del consumidor i , dados un vector de precios y los planes de producción contingentes de las J empresas, se define como

$$B_i = \left\{ \mathbf{x}_i \in X_i : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ji} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \right\}.$$

Cada consumidor i elige en el conjunto B_i un vector de mercancías contingentes $\mathbf{x}_i^*$ tal que $\mathbf{x}_i^* \succeq_i \mathbf{x}_i$ para todo $\mathbf{x}_i \in B_i$.

b. El problema de la empresa

Cada empresa $j \in J$ tiene un conjunto de planes de producción factibles, que llamaremos $Y_j \subset R^{LS}$. Sus elementos son llamados *planes de producción contingentes para cada estado del mundo*, y se denotan como

$$y_j = (y_{11j}, \dots, y_{L1j}, \dots, y_{1sj}, \dots, y_{Lsj}) \in Y_j \subset R^{LS},$$

donde $y_{lsj} > 0$ indica la cantidad neta del bien l que produciría la empresa j con un plan de producción factible para el estado s . Por el contrario, $y_{lsj} < 0$ indica la cantidad del bien l que necesitaría utilizar como insumo neto en un plan de producción factible para el estado s .

Supondremos que $Y_j \subset R^{LS}$ es cerrado y convexo, y, además, que

- i. $Y_j \cap R_+^{LS} = \{0\}$ (no hay almuerzo gratis)
- ii. $Y_j - R_+^{LS} \subset Y_j$ (libre eliminación)
- iii. $y_j \in Y_j, y_j \neq 0 \Rightarrow -y_j \notin Y_j$ (irreversibilidad)

Debe tenerse en cuenta que los insumos se eligen antes de conocerse el estado, y que el producto se obtiene después. Por tal razón, la cantidad de insumos a utilizar debe ser la misma en todos los estados del mundo antes de resolverse la incertidumbre, mientras que la de productos obtenidos puede ser diferente. Una vez resuelta la incertidumbre, la empresa obtiene un único nivel de producto para cada uno de los bienes que produce.

Para elegir el plan de producción óptimo, la empresa debe conocer los precios de cada bien en cada estado del mundo. Dado el vector

$$p = (p_{11}, \dots, p_{L1}, \dots, p_{1s}, \dots, p_{Ls}) \in R^{LS}$$

cada empresa elegiría un plan y_j^* tal que $p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j$ para todo $y_j \in Y_j$.

El beneficio $p \cdot y_j$ es una cantidad no aleatoria de bolívares: aun cuando la empresa sólo entregará la cantidad de bienes que produzca en s , vende como mercancías contingentes el deber de entregar las cantidades que especifique y_j para cada estado del mundo posible, antes de su revelación.

2. El equilibrio Arrow-Debreu

Conocidos los problemas de optimización individuales, se define el equilibrio Arrow-Debreu como una asignación

$$(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_I^*, \mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_J^*) \in X_1 \times \dots \times X_I \times Y_1 \times \dots \times Y_J \subset R^{LS(I+J)}$$

y un vector de precios para las mercancías contingentes, perfectamente anticipado por empresas y consumidores,

$$\mathbf{p} = (p_{11}, \dots, p_{L1}, \dots, p_{1S}, \dots, p_{LS}) \in R^{LS}$$

tales que

$$i) \quad \forall j \quad \mathbf{y}_j^* \text{ satisface } \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^* \geq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j \quad \forall \mathbf{y}_j \in Y_j$$

$$ii) \quad \forall i \quad \mathbf{x}_i^* \text{ es maximal para } \succeq_i \text{ en el conjunto presupuestario}$$

$$B_i^{AD} = \left\{ \mathbf{x}_i \in X_i : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i \leq \mathbf{p} \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ji} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j^* \right\}$$

$$iii) \quad \sum_i \mathbf{x}_i^* = \sum_j \mathbf{y}_j^* + \sum_i \omega_i$$

El primer punto requiere que todas las empresas elijan planes de producción que les permitan obtener beneficios no inferiores a otros que también sean factibles. Nótese que, en el segundo punto, al definir el conjunto presupuestario B_i^{AD} , se incorpora la participación en los beneficios de las empresas en el lado de la riqueza de cada consumidor. Se supone que cada uno de ellos elige un vector de mercancías contingente para el cual no exista otro disponible estrictamente preferido.

El tercer punto establece una condición de factibilidad para la asignación social. La suma de las cantidades que cada consumidor tendría a su disposición en cada estado del mundo debe ser igual a la suma de los productos netos que todas las empresas podrían obtener en cada estado del mundo, más las dotaciones de bienes que cada individuo recibiría en cada estado posible.

Formalmente, el equilibrio Arrow-Debreu tiene las mismas características del equilibrio Walrasiano. Por ello pueden probarse la existencia del equilibrio y la satisfacción de los dos teoremas del bienestar bajo las mismas condiciones matemáticas requeridas en el Capítulo III. Sin embargo, este nuevo equilibrio exige interpretaciones adicionales.

1. El equilibrio Walrasiano requiere que exista un vector de precios tal que L mercados de bienes se vacíen y todos los agentes que participen en la economía obtengan resultados óptimos de sus decisiones dadas sus restricciones. Dado un

vector de precios, los agentes conocen las consecuencias de sus decisiones, puesto que sólo dependen de ellas. Habiendo incertidumbre, la situación es diferente. El equilibrio Arrow-Debreu requiere que los agentes tomen decisiones *antes* de conocer el estado del mundo, y que observen las consecuencias *después*. Por tanto, si hay L bienes y S estados del mundo, los agentes deben considerar LS mercancías contingentes *ex ante*, y recibir L resultados *ex post*. Los consumidores pueden comprar o vender LS derechos *ex ante*, para recibir o entregar cantidades de L bienes *ex post*. Las empresas contratan insumos y venden derechos sobre productos en LS mercados *ex ante*, obligándose a hacer entregas en L mercados *ex post*.² El precio de una unidad de un bien l que se entregue o reciba *ex post* en cualquiera de los S estados posibles del mundo debe ser, por tanto, $\sum_s p_{ls}$.

2. Las preferencias de los consumidores deben ser convexas para que el segundo teorema del bienestar se cumpla. Cuando hay incertidumbre, ello significa suponer que los consumidores son aversos al riesgo.
3. Puesto que existen LS mercados *ex ante*, y se supone que todos los agentes anticipan perfectamente el vector de precios de equilibrio y que cada consumidor tiene una única restricción presupuestaria, toda asignación Pareto óptima *ex ante* implica una asignación Pareto óptima *ex post*. Veamos por qué. El primer teorema del bienestar permite afirmar que, si la asignación $(x_1^*, \dots, x_I^*, y_1^*, \dots, y_J^*) \in R^{LS(I+J)}$ forma parte de un equilibrio Arrow-Debreu, entonces es Pareto óptima *ex ante*. No lo sería *ex post* en el estado s si existiera, al menos para un consumidor, un $x_{si} = (x_{1si}, \dots, x_{Lsi}) \in R^L$ tal que

$$\sum_i x_{si}^* = \sum_j y_{sj}^* + \sum_i \omega_{si}$$

y

$$(x_{1i}^*, \dots, x_{si}^*, \dots, x_{Si}^*) \succeq_i (x_{1i}^*, \dots, x_{si}^*, \dots, x_{Si}^*) \quad \forall i$$

con preferencia estricta para algún i . Ello sería posible sólo si no hubiéramos partido de un equilibrio Arrow-Debreu, y, por tanto, de una asignación Pareto óptima *ex ante*. Por tal razón, si, una vez conocido el equilibrio y revelado el estado del mundo, se permitiera a los individuos revisar sus decisiones con el mismo vector de precios con el cual las tomaron, no efectuarían cambios.

Un equilibrio Arrow-Debreu existe, y satisface los dos teoremas del bienestar bajo los supuestos habituales. Para ello, exige la disponibilidad de LS mercados de mercancías contingentes antes de resolverse la incertidumbre. Un resultado equivalente puede

² Obsérvese que si la empresa produce un único bien, hay S cantidades posibles del producto *ex ante*, de las cuales sólo una se hace efectiva *ex post*.

obtenerse, sin embargo, con $(L + S)$ mercados: S mercados de mercancías contingentes que abren *antes* de revelarse el estado del mundo y L mercados de bienes físicos que abren *después* de revelado s . A continuación, estudiaremos el equilibrio de Radner.

3. El equilibrio de Radner en economías de intercambio puro

Al presentar el equilibrio Arrow-Debreu, hemos observado que los consumidores adquieren derechos sobre bienes *antes* de resolverse la incertidumbre, y reciben los bienes *después*, dependiendo del estado del mundo que se revele. Mercados que permiten realizar operaciones de este tipo son llamados mercados *forward*. En otros términos, diremos que un mercado es *forward* si las compras y ventas se realizan en el período $t = 0$, en condiciones de incertidumbre, y las entregas se realizan en $t = 1$.

Si, una vez revelado s , se abren los mercados antes de efectuar el consumo, los nuevos intercambios se realizarían en mercados *spot*: compras, ventas y entregas ocurren en un mismo período, y sin incertidumbre. En el caso de Arrow-Debreu, la apertura *ex post* de mercados no tendría consecuencias sobre las elecciones de los consumidores: teniendo LS mercados a su disposición *ex ante* (en $t = 0$), pueden distribuir de un modo inmejorable su poder de compra *ex post* (en $t = 1$). A continuación, estudiaremos un caso diferente, en el cual aparecen intercambios secuenciales. Primero, se abren S mercados *forward* en $t = 0$, que permiten a cada consumidor adquirir derechos sobre cantidades de un bien físico (digamos el bien 1) en cada estado del mundo posible en $t = 1$. Luego, en $t = 1$, se abren los L mercados *spot* correspondientes al estado s revelado. Como veremos más adelante, a pesar de requerirse $L + S$ mercados en lugar de LS , los equilibrios resultantes en ambos casos son equivalentes.

Primero supondremos que tales derechos son activos de Arrow: un título que le da derecho a una unidad del bien 1 en un estado particular s , y a nada en cualquier otro estado. Luego, generalizaremos la discusión para tratar otro tipo de activos.

a. El problema del consumidor con activos de Arrow

Aun cuando el consumidor debe tomar decisiones en $t = 0$ y $t = 1$, su función de utilidad depende únicamente de las cantidades que podrían consumirse en cada estado del mundo posible, en $t = 1$. Las operaciones realizadas en $t = 0$ se hacen con la intención de redistribuir el poder de compra entre los estados, de modo que la utilidad esperada en $t = 0$ para $t = 1$ sea máxima.

El nuevo problema de optimización del consumidor puede escribirse como

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\substack{(\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{Si}) \in R_i^{LS} \\ (z_{1i}, \dots, z_{Si}) \in R_i^S}} U_i(\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{Si}) \quad \text{sueto a} \quad \sum_s q_s z_{si} \leq 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_s \cdot \mathbf{x}_{si} \leq \mathbf{p}_s \cdot \boldsymbol{\omega}_{si} + p_{1s} z_{si} \quad \forall s. \end{aligned}$$

En primer lugar, consideremos el vector $\mathbf{z}_i = (z_{1i}, \dots, z_{Si})$. Supondremos que en $t = 0$, es posible adquirir derechos sobre cantidades de un bien en particular, a ser

entregadas en $t=1$ según el estado del mundo que corresponda. En nuestra exposición, dicho bien será el bien 1. Llamaremos z_i a un vector de títulos por medio de los cuales el individuo i adquiere en $t=0$ derechos y obligaciones de recibir y entregar la cantidad z_{si} del bien 1 en $t=1$ según sea el estado del mundo s ³. Cada título debe tener un precio, que llamaremos q_s . Puesto que supondremos que la dotación de títulos es nula, la adquisición de derechos debe financiarse con la de obligaciones. Por ello no es posible que $\sum_s q_s z_{si} > 0$. La primera restricción del problema de optimización recoge esta afirmación.

Las S restricciones siguientes permiten apreciar la importancia de las decisiones tomadas en $t=0$. En $t=1$ se habrá revelado un estado s , y se abrirán L mercados *spot*. En cada estado, la riqueza del consumidor va a tener dos componentes: el valor de su dotación de bienes correspondiente y el de la cantidad del bien 1 que compró o vendió en $t=0$, cuyo precio en s es p_{1s} . Si compró, su riqueza será mayor que la que obtendría únicamente de su dotación. Ocurriría lo contrario si hubiera vendido. La posibilidad de acceder a los S mercados de títulos en $t=0$ permite redistribuir el poder de compra entre los posibles estados a revelarse en $t=1$. Veremos que ello conduce a un equilibrio con las mismas propiedades del equilibrio Arrow-Debreu.

b. Equilibrio de Radner con activos de Arrow

Un equilibrio de Radner es una colección formada por los planes

$$z^* = (z_1^*, \dots, z_I^*) \in R^{SI} \quad y \quad x^* = (x_1^*, \dots, x_I^*) \in R^{LSI}$$

y vectores de precios

$$q = (q_1, \dots, q_S) \in R^S \quad y \quad p_s = (p_{1s}, \dots, p_{Ls}) \in R^L \quad \forall s$$

tales que

$$i) \quad \forall i \quad z_i^* = (z_{1i}^*, \dots, z_{Si}^*) \in R^S \quad y \quad x_i^* = (x_{1i}^*, \dots, x_{Si}^*) \in R^{LS}$$

resuelvan el problema

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\substack{(x_{1i}, \dots, x_{Si}) \in R^{LS} \\ (z_{1i}, \dots, z_{Si}) \in R^S}} U_i(x_{1i}, \dots, x_{Si}) \quad \text{sujeto a} \quad \sum_s q_s z_{si} \leq 0 \quad y \quad p_s \cdot x_{si} \leq p_s \cdot \omega_{si} + p_{1s} z_{si} \quad \forall s. \end{aligned}$$

³ Si $z_{si} > 0$, se trata de un derecho, una compra en el mercado *forward*. Si $z_{si} < 0$, de una obligación, o una venta. Supondremos que un consumidor puede vender más de lo que le tocaría como dotación del bien 1 en el estado s , puesto que podría comprar la diferencia haciendo las ventas necesarias de otros bienes en $t=1$ para cumplir el compromiso adquirido. A las ventas del bien 1 en exceso de su dotación se les llama ventas *en corto*, o a *descubierto*.

$$ii) \sum_i z_{si}^* \leq 0$$

$$iii) \sum_i \mathbf{x}_{si}^* \leq \sum_i \omega_{si} \quad \forall s$$

Para poder resolver el problema del primer punto se supone que los consumidores tienen expectativas racionales, lo que, en este contexto, significa que pueden anticipar perfectamente en $t=0$ las componentes de los vectores $\mathbf{p}_s$, los vectores de precios *spot* en $t=1$.

El segundo punto se requiere porque se ha supuesto que no hay dotación de títulos en $t=0$. El tercero indica que no puede consumirse en la economía más de lo que la suma de las dotaciones individuales de bienes haga posible en cada estado del mundo. En este último punto no aparecen los títulos z_{si}^* , porque no añaden ni restan a la cantidad total del bien 1 en la economía. Es conveniente recordar que su función es permitir redistribuir en $t=0$ las cantidades del bien que estarán disponibles en $t=1$, de modo que el poder de compra de los consumidores se redistribuya de modo óptimo entre todos los estados del mundo posibles.

c. Equivalencia de los equilibrios Arrow-Debreu y Radner con activos de Arrow

Un equilibrio de Radner es idéntico a un equilibrio Arrow-Debreu bajo ciertos supuestos. Para probarlo, debe demostrarse primero que los conjuntos presupuestarios de los consumidores en una economía con equilibrio Arrow-Debreu son iguales a los de los consumidores en una economía con equilibrio Radner. Si las funciones de utilidad son iguales en ambos casos, las elecciones de los consumidores no podrían ser diferentes. Luego, debe probarse que las restricciones de factibilidad de las asignaciones sociales son compatibles entre sí.

Comencemos con la equivalencia de los conjuntos presupuestarios. El conjunto del consumidor i en el caso Arrow-Debreu puede escribirse como

$$B_i^{AD} = \left\{ (\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{Si}) \in R_+^{LS} : \sum_s \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq 0 \right\}.$$

En el caso de Radner, el conjunto es

$$B_i^R = \left\{ (\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{Si}) \in R_+^{LS} : \exists (z_{1i}, \dots, z_{Si}) \text{ tal que } \sum_s q_s z_{si} \leq 0 \text{ y } \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq p_{1s} z_{si} \quad \forall s \right\}.$$

Ambos conjuntos son subconjuntos de R_+^{LS} : son conjuntos de vectores $\mathbf{x}_i \in R_+^{LS}$ que indican una cesta de consumo accesible $\mathbf{x}_{si}$ para cada estado s posible en $t=1$. En el caso de Radner, el conjunto presupuestario no puede definirse sin disponer de un vector $\mathbf{z}_i$ que permita redistribuir el poder de compra del consumidor entre todos los

estados posibles. Dicho vector se obtiene simultáneamente con $\mathbf{x}_i$ al resolver el problema de optimización.

Para conocer su conjunto presupuestario, cada consumidor debe disponer de los vectores de precios $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_S)$. Recordemos que se supone que los individuos anticipan perfectamente en $t=0$ el vector $\mathbf{p}$. Con respecto a $\mathbf{q}$, propondremos dos alternativas para su determinación a partir del precio anticipado del bien 1 en cada s posible en $t=1$.

Si un bolívar en $t=0$ vale un bolívar en $t=1$ y el estado s , $q_s = p_{1s}$, por lo que $\sum_s p_{1s} z_{si} = \sum_s q_s z_{si}$. Con esta igualdad probaremos que $\mathbf{x}_i \in B_i^{AD}$ sí y sólo $\mathbf{x}_i \in B_i^R$. Sumando las S restricciones del caso Radner para cada estado s obtenemos

$$\sum_s \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq \sum_s p_{1s} z_{si} = \sum_s q_s z_{si}.$$

Si $\mathbf{x}_i \in B_i^R$, existe un $\mathbf{z}_i$ tal que $\sum_s q_s z_{si} \leq 0$. En este caso, $\sum_s \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq 0$, por lo que $\mathbf{x}_i \in B_i^{AD}$.

Si comenzamos por B_i^{AD} , donde $\sum_s \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq 0$, debemos probar la existencia de un $\mathbf{z}_i$ satisfaga las $S+1$ restricciones que definen B_i^R . Si $\mathbf{x}_i \in B_i^{AD}$, y se define el vector $\mathbf{z}_i$ con $z_{si} = \frac{1}{p_{1s}} \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si})$, entonces $\mathbf{x}_i \in B_i^R$, puesto que se cumple

$$0 \geq \sum_s \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) = \sum_s p_{1s} z_{si} = \sum_s q_s z_{si}.$$

El cumplimiento de las restricciones de factibilidad de un equilibrio implican el cumplimiento de las del otro. Obsérvese que

$$\sum_i z_{si} = \frac{1}{p_{1s}} \mathbf{p}_s \cdot \left(\sum_i \mathbf{x}_{si} - \sum_i \omega_{si} \right)$$

Consideremos otra posibilidad. El valor en $t=0$ de un bolívar en $t=1$ y el estado s es $\mu_s > 0$. En un equilibrio de Radner, el consumidor adquiere derechos u obligaciones sobre el bien 1 al precio q_s en $t=0$, y que su precio en s será p_{1s} . Dados $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_S)$, puede obtenerse $\mu_s = \frac{q_s}{p_{1s}}$. Probaremos que, con $(\mu_1 \mathbf{p}_1, \dots, \mu_S \mathbf{p}_S) \in R^{LS}$, las elecciones de los consumidores sobre X_i en un equilibrio de Arrow-Debreu son

iguales a las hechas en el equilibrio de Radner dado. Para ello, basta probar que los conjuntos presupuestarios son iguales.

Todo $\mathbf{x}_i \in R_+^{LS}$ que satisfaga $\mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq p_{1s} z_{si}$, también satisface

$$\mu_s \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq \mu_s p_{1s} z_{si} = q_s z_{si},$$

por tanto,

$$\sum_s \mu_s \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq \sum_s \mu_s p_{1s} z_{si} = \sum_s q_s z_{si},$$

de donde

$$B_i^R = B_i^{AD} = \left\{ (\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{Si}) \in R_+^{LS} : \sum_s \mu_s \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) \leq 0 \right\}.$$

De este modo, partiendo de un equilibrio de Radner con precios $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_S)$, relacionados por medio de $q_s = \mu_s p_{1s}$, podemos obtener un equilibrio Arrow-Debreu con $\mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_1^*, \dots, \mathbf{p}_S^*) = (\mu_1 \mathbf{p}_1, \dots, \mu_S \mathbf{p}_S) \in R^{LS}$ y el mismo conjunto de planes de consumo en $\mathbf{x}_i \in R_+^{LS}$.

Observemos que:

1. Los precios relativos de los bienes en cada estado del mundo en el equilibrio de Radner son iguales a los correspondientes en el de Arrow-Debreu, puesto que

$$\frac{\mathbf{p}_s}{p_{1s}} = \frac{\mathbf{p}_s^*}{p_{1s}^*}. \text{ Por tal razón, si partimos de un equilibrio Arrow-Debreu, podemos}$$

definir infinitos equilibrios Radner, uno para cada $(\mu_1, \dots, \mu_S) \in R_{++}^S$. Teniendo en

cuenta $q_s = p_{1s}^* = \mu_s p_{1s}$, pueden deducirse S vectores $\mathbf{p}_s = \frac{\mathbf{p}_s^*}{\mu_s}$. La existencia de

z_i se prueba del mismo modo que antes:

$$z_{si} = \frac{1}{p_{1s}^*} \mathbf{p}_s^* \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si}) = \frac{1}{p_{1s}} \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{x}_{si} - \omega_{si})$$

2. Puesto que las $S+1$ restricciones que definen B_i^R son homogéneas de grado 1 con respecto a los precios, puede determinarse exógenamente un precio en cada una de ellas. Haciendo $p_{1s} = 1$ en cada s , por ejemplo, se utiliza el bien 1 como numerario en cada uno del S mercados *spot* posibles en una economía de Radner. También puede normalizarse cada vector de precios. Por ejemplo, en lugar de hacer $q_1 = 1$, puede hacerse $\sum_s q_s = 1$.

d. Extensión: equilibrio de Radner con otros activos

El caso que hemos estudiado hasta ahora es muy particular. Cuando un consumidor adquiere $z_{si} = 1$, adquiere un título que le da derecho a una unidad del bien 1 en s , y a nada en cualquier otro estado. El retorno del título es una unidad del bien 1 en s , y cero en cualquier otro estado. Hemos supuesto hasta ahora que, en $t = 0$, abren S mercados de títulos. Para el caso que hemos estudiado, podemos escribir la siguiente matriz de retornos

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1S} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{S1} & r_{S2} & \cdots & r_{SS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos la componente r_{12} . Ella indica el pago que un título, que llamaremos 2 (por ser adquirido en previsión de la ocurrencia del estado 2) otorga cuando ocurre el estado 1. Por las características del título que hemos estudiado, el pago es igual a cero. Únicamente el pago es positivo cuando $r_{ss} = 1$, para todo s .

Estudiaremos a continuación un caso más general. Supondremos que el número de títulos es K , pudiendo ser $K = S$, $K > S$ o $K < S$. Supondremos, además, cada título k otorga el derecho a recibir la cantidad $r_{sk} \geq 0$ del bien 1 si ocurre el estado del mundo s . Cada título k es llamado activo k , y se le caracteriza mediante su vector de retornos, $\mathbf{r}_k = (r_{1k}, \dots, r_{Sk})$. En el caso más general, la matriz de retornos

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1K} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{S1} & r_{S2} & \cdots & r_{SK} \end{bmatrix}$$

no tiene que ser ni igual a la matriz identidad, ni cuadrada. El conjunto de K títulos es llamado estructura de activos. Se supone nula la dotación de cada uno. Si $K \geq S$, y el rango de $\mathbf{R}$ es S , se dice que la estructura de activos descrita por $\mathbf{R}$ es completa. En este caso, se dice que hay $K - S \geq 0$ activos redundantes: sus vectores de retorno pueden hallarse como combinaciones lineales de S vectores linealmente independientes, y su adición o eliminación de la estructura no altera las asignaciones de consumo del equilibrio de Radner. Si, por el contrario, $K < S$, la estructura de activos es incompleta, y no podría realizarse una redistribución óptima de la riqueza entre los S estados del mundo.

El vector de precios de los activos es $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_K) \in R_{++}^K$. El vector $\mathbf{z}_i = (z_{1i}, \dots, z_{Ki}) \in R^K$, llamado portafolio, o cartera, del consumidor i , indica las cantidades compradas (si $z_{ki} > 0$) o vendidas (si $z_{ki} < 0$) del activo k por el consumidor i .

Con estos nuevos conceptos, podemos generalizar la definición ya presentada del equilibrio de Radner.

Un equilibrio de Radner es una colección formada por los planes

$$\mathbf{z}^* = (z_1^*, \dots, z_I^*) \in R^{KI} \text{ y } \mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_I^*) \in R^{LSI}$$

y vectores de precios

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_K) \in R^K \text{ y } \mathbf{p}_s = (p_{1s}, \dots, p_{Ls}) \in R^L \quad \forall s$$

tales que

$$i) \quad \forall i \quad \mathbf{z}_i^* = (z_{1i}^*, \dots, z_{Ki}^*) \in R^K \text{ y } \mathbf{x}_i^* = (\mathbf{x}_{1i}^*, \dots, \mathbf{x}_{Si}^*) \in R^{LS}$$

resuelvan el problema

$$\text{Max}_{\substack{(\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{Si}) \in R^{LS} \\ (z_{1i}, \dots, z_{Ki}) \in R^K}} U_i(\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{Si}) \text{ sujeto a } \sum_k q_k z_{ki} \leq 0 \text{ y } \mathbf{p}_s \cdot \mathbf{x}_{si} \leq \mathbf{p}_s \cdot \boldsymbol{\omega}_{si} + \sum_k p_{1s} z_{ki} r_{sk} \quad \forall s.$$

$$ii) \quad \sum_i z_{ki}^* \leq 0 \quad \forall k$$

$$iii) \quad \sum_i \mathbf{x}_{si}^* \leq \sum_i \boldsymbol{\omega}_{si} \quad \forall s$$

e. La condición de no arbitraje

Puesto que la dotación de activos es nula, un portafolio es factible dentro del presupuesto de i si $\mathbf{q} \cdot \mathbf{z}_i = \sum_k q_k z_{ki} \leq 0$. El vector $\mathbf{q}$ se considera libre de arbitraje si no existe un $\mathbf{z}_i$ tal que $\mathbf{Rz}_i \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{Rz}_i \neq \mathbf{0}$. Nótese que, si existiese tal $\mathbf{z}_i$, siendo

$$\mathbf{Rz}_i = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{S1} & \dots & r_{SK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1i} \\ \vdots \\ z_{Ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k r_{1k} z_{ki} \\ \vdots \\ \sum_k r_{Sk} z_{ki} \end{bmatrix},$$

el consumidor tendría al menos un $\sum_k r_{sk} z_{ki} > 0$, y todos los demás serían no negativos.

En este caso, un portafolio λz_i con $\lambda > 1$ sería factible, y la riqueza del consumidor podría incrementarse con λ . No habiendo restricciones adicionales sobre los portafolios a elegir, el problema del consumidor no tendría solución. La condición de no arbitraje requiere que, si $\mathbf{R} > 0$, entonces $\mathbf{q} \gg 0$.

Dados $\mathbf{R} > 0$ y $\mathbf{q} \gg 0$, puede probarse que existe un $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_S) \in R_+^S$ tal que

$$\mathbf{q}^T = \mu \cdot \mathbf{R} = [\mu_1 \quad \dots \quad \mu_S] \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{S1} & \dots & r_{SK} \end{bmatrix} = \left[\sum_s \mu_s r_{s1} \quad \dots \quad \sum_s \mu_s r_{sK} \right].$$

Es decir, que el precio de cada activo k puede escribirse como una combinación lineal no negativa de sus retornos en cada estado del mundo. El coeficiente μ_s es el valor en $t=0$ de un bolívar en $t=1$ y el estado s .

La prueba de la afirmación anterior utiliza el teorema del hiperplano separador, por lo que requerimos de dos conjuntos convexos y disjuntos. Comenzamos con

$$V = \{\mathbf{v} \in R^S : \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{z} \text{ para algún } \mathbf{z} \in R^K \text{ con } \mathbf{q} \cdot \mathbf{z} = 0\},$$

el conjunto de vectores de riqueza que pueden ser generados por $\mathbf{R}$, para algún portafolio auto-financiable. Obsérvese que $\mathbf{0} \in V$. Nótese también que, si $\mathbf{z}$ es auto-financiable, $-\mathbf{z}$ también, por lo que, si $\mathbf{v} \in V$, también $-\mathbf{v} \in V$.

Dado un $\mathbf{q}$ libre de arbitraje, $V \cap \{R_+^S \setminus \{0\}\} = \emptyset$. Siendo ambos conjuntos disjuntos convexos, puede aplicarse el teorema del hiperplano separador: existe un $\mu' \neq \mathbf{0}$ tal que $\mu' \cdot \mathbf{v} \leq 0$ si $\mathbf{v} \in V$, y $\mu' \cdot \mathbf{v} \geq 0$ si $\mathbf{v} \in R_+^S$. De la última desigualdad, se deduce que $\mu' \geq 0$. Por ello, si $\mathbf{v} \in V$ (y también $-\mathbf{v} \in V$), debe cumplirse que $\mu' \cdot \mathbf{v} = 0$.

Hemos probado que $\mu' \cdot \mathbf{R}\mathbf{z} = 0$. Multiplicando ambos lados por $\alpha > 0$, obtenemos $\alpha \mu' \cdot \mathbf{R}\mathbf{z} = 0$. Denotando $\mu = \alpha \mu'$, y recordando que $\mathbf{z}$ es auto-financiable, probamos que $\mathbf{q}^T = \mu \cdot \mathbf{R} \geq 0$.

4. Información imperfecta y expectativas racionales: equilibrio Green-Lucas

Hasta ahora, hemos presentado situaciones en las cuales la incertidumbre existente en $t=0$ se resuelve en $t=1$, sin que los agentes puedan revisar sus creencias con respecto a la elección de la naturaleza antes de tomar sus propias decisiones. A

continuación, supondremos que los agentes reciben información útil para revisar sus creencias en $t = 1$, y que toman sus decisiones en $t = 2$.

Para representar la transmisión de información, comenzamos por definir una función señal para cada consumidor i , de modo que

$$\sigma_i : S \rightarrow R$$

indica que a cada estado del mundo s se asigna un número real. Es posible que uno, dos o más estados $s'' \in S$ tengan asignado el mismo número que el estado s , $\sigma_i(s)$. El conjunto de tales estados se denota

$$E_{\sigma_i(s)} = \{s'' \in S : \sigma_i(s'') = \sigma_i(s)\}.$$

Si hay S conjuntos $E_{\sigma_i(s)}$, cada uno con un único elemento, la señal ofrece al consumidor información perfecta con respecto a la decisión de la naturaleza. En caso de haber menos de S conjuntos $E_{\sigma_i(s)}$, la información del consumidor es imperfecta. Sin embargo, puede revisar sus creencias con respecto a la elección de la naturaleza, utilizando la regla de Bayes. Así, por ejemplo, si recibe la señal $\sigma_i(s)$, y $s' \in E_{\sigma_i(s)}$, el consumidor puede revisar la probabilidad *a priori* $\pi_{s'i}$ obteniendo $\pi_{s'i} | \sigma_i(s) = \frac{\pi_{s'i}}{\sum_{s'' \in E_{\sigma_i(s)}} \pi_{s''i}}$.

Simplificando la notación, $v_{s'i} \equiv \pi_{s'i} | \sigma_i(s)$.

Antes de recibir la señal, el consumidor maximizaría

$$U_i(\mathbf{x}_i) = \sum_s \pi_{si} u_{si}(\mathbf{x}_{si})$$

sujeto a

$$\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{x}_{si} \leq \mathbf{p}_s \cdot \omega_{si} \quad \forall s.$$

Recibida, maximizaría

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{s'} v_{s'i} u_{s'i}(\mathbf{x}_{s'i}).$$

sujeto a

$$\mathbf{p}_{s'} \cdot \mathbf{x}_{s'i} \leq \mathbf{p}_{s'} \cdot \omega_{s'i} \quad \forall s'.$$

A pesar del cambio en la notación, debe entenderse que ambas sumas tienen S sumandos.

Si todos los consumidores i reciben la misma señal, es decir, si $\sigma_i(s) = \sigma(s)$, se dice que la señal es pública. En este caso, la información es simétrica, y es posible definir un equilibrio Arrow-Debreu-Radner como una asignación $\mathbf{x}^*$ y un vector de precios $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{x}_i^* = (x_{i1}^*, \dots, x_{si}^*) \in R^{LS}$ resuelva el problema de optimización de cada consumidor, y, para todo s , $\sum_i x_{si}^* \leq \sum_i \omega_{si}$.

Si, por el contrario, los individuos reciben señales privadas, diferentes unas de otras, se dice que la información es asimétrica. Para este caso, se define el equilibrio Green-Lucas, o equilibrio con expectativas racionales, que toma en cuenta el papel de los precios como transmisores de información.

Durante la siguiente exposición, consideraremos una economía donde hay dos bienes. El bien 1 es tratado como numerario en todos los estados del mundo. El precio *spot* del bien 2 en cada estado recibirá nuestra atención a continuación.

Las elecciones de los consumidores dependen de la información de la cual disponen. El precio del bien 2 en cada estado debe determinarse de modo que las elecciones de los consumidores sean óptimas dadas sus restricciones y de modo que se vacíen los mercados. A partir de la información suministrada por las señales privadas, puede obtenerse un precio que vacíe el mercado del bien 2. Dicho precio, que llamamos

$$p(s) = p(\sigma_1(s), \dots, \sigma_I(s))$$

agrega todas las informaciones privadas, y, por tal razón, revela información de unos a otros. El precio envía una señal pública a todos los consumidores, que supondremos pueden utilizar para revisar sus creencias con respecto al estado del mundo en el cual se encuentran. Al revisar sus creencias, los consumidores pueden cambiar sus decisiones y el precio puede modificarse. Para determinar el precio de equilibrio, es preciso que sea imposible ganar con él nueva información sobre el estado del mundo: la información revelada por los precios y la utilizada por los consumidores deben ser consistentes. El conjunto de los estados del mundo para los cuales son posibles la señal privada $\sigma_i(s)$ y la señal pública $p(s)$ recibidas por i se denotará como

$$E_{\sigma_i(s), p(s)} = \{s'' \in S : \sigma_i(s'') = \sigma_i(s) \text{ y } p(s'') = p(s)\}.$$

Usando la regla de Bayes, a partir de la probabilidad *a priori*, $\pi_{s'i}$, puede obtenerse la probabilidad *a posteriori* $\pi_{s'i} | \sigma_i(s), p(s) = \frac{\pi_{s'i}}{\sum_{s'' \in E_{\sigma_i(s), p(s)}} \pi_{s''i}}$. La función de utilidad

esperada del consumidor i puede actualizarse con esta nueva distribución de probabilidad, de modo que el consumidor desearía maximizar

$$\sum_{s'} [\pi_{s'i} | \sigma_i(s), p(s)] \mu_{s'i}(x_{s'i}) \quad \text{sujeto a} \quad p_{s'} \cdot x_{s'i} \leq p_{s'} \cdot \omega_{s'i} \quad \forall s'$$

Si, para todo s , la función $p(s)$ vacía el mercado *spot*, se dice que $p(s)$ es la función de precios de equilibrio con expectativas racionales, o equilibrio Green-Lucas.

5. Resumen

Si se supone que los mercados son completos, es decir, que hay tantos activos como estados posibles de la naturaleza, los individuos pueden transferir sus dotaciones entre estados de modo que la asignación de consumos resultante sea óptima en el sentido de Pareto. Ello es cierto tanto si hay mercados *forward* para todos los estados y todas las mercancías contingentes en $t=0$ como si hay mercados para todos los estados y una única mercancía, y luego hay mercados *spot* para todos los bienes en el estado verdadero de la naturaleza, revelado en $t=1$.

Estas afirmaciones resultan de la equivalencia formal entre los equilibrios Walrasiano, Arrow-Debreu, Radner y Lucas-Green, bajo ciertas condiciones.

V. Equilibrio general dinámico con certidumbre

Introducción

Tener en cuenta el tiempo en el estudio de los fenómenos económicos requiere de métodos y conceptos específicos. Según Shumpeter (1975, pág. 176), su ausencia a finales del siglo XIX condujo a un “manicomio de confusión” entre análisis estático y dinámico y estados estacionario y evolutivo. Consideremos algunas de las definiciones que propone. El análisis estático es un método para establecer relaciones entre variables para las cuales la “asignación de tiempo” es la misma, es decir, que se consideran en un mismo momento del tiempo. El análisis dinámico, por el contrario, tiene en cuenta momentos distintos del tiempo y permite considerar aspectos vinculados directamente con su transcurrir, como las tasas de cambio, la acumulación de existencias y la formación de expectativas. Según Shumpeter, el análisis estático, al hacer abstracción de todas estos aspectos, surgió primero tanto en la economía como en la física. A partir de él, podrían obtenerse herramientas metodológicas para desarrollar el análisis dinámico.

El estado estacionario define una situación en la cual, a pesar del paso del tiempo, los valores de las variables no cambian. Lo contrario define un estado evolutivo. A finales del siglo XIX, el avance metodológico había permitido desarrollar teorías estáticas que en ocasiones podían utilizarse con provecho en el estudio de estados estacionarios y evolutivos. Según Shumpeter, el uso de los métodos estáticos para estudiar estados evolutivos recibió el nombre de estática comparativa en 1916. Sin embargo, no todos los problemas que involucran el paso del tiempo podían tratarse correctamente utilizando la estática comparativa. Algunos economistas saltaron las limitaciones metodológicas del análisis estático de su tiempo para obtener conclusiones dinámicas, lo que les indujo a errores, de los cuales posiblemente nunca estuvieron conscientes.

En este Capítulo se presentan extensiones de la teoría estática del equilibrio general, sin incertidumbre, para tratar el equilibrio en un sistema dinámico con certidumbre. Para ello, se considera una economía con un consumidor y una empresa, ambos resolviendo problemas de optimización restringida. Primero, consideraremos un problema con horizonte finito, cuyo modo de solución se vincula directamente con lo estudiado en el Capítulo III. Luego, consideraremos un problema con horizonte infinito, que requiere incorporar nuevos métodos de optimización y permite plantear nuevas dificultades. Por último, afirmamos que es posible extender los resultados asociados con un único consumidor en economías con varios consumidores, si cumplen con ciertas condiciones. En este Capítulo, notaremos que los dos teoremas del bienestar se satisfacen. En todos los modelos, se debe suponer que los mercados son completos, lo que implica suponer que existen infinitos mercados *forward* en $t = 0$, o que la sucesión de precios *spot* puede ser correctamente anticipada.

La teoría dinámica del equilibrio general no se introduce en todas sus variantes en este Capítulo. No se mencionan los modelos de generaciones solapadas, ni se comentan los modelos dinámicos con incertidumbre, muy utilizados por los nuevos clásicos. Para el estudio de dichos temas se recomiendan Farmer (1993), McCandless y Wallace (1991) y Stokey y Lucas (1989). Por otra parte, la mención realizada a los sistemas dinámicos caóticos al final de este Capítulo puede atraer la atención del lector. Son recomendables Baumol, W. y J. Benhabib (1989), Becker y Boyd III (1997), Hilborn, R. (1994) y Medio (1992).

1. Precios, mercancías y agentes en una economía con tiempo

En esta sección se presentan las definiciones de precios, mercancías, preferencias y tecnología utilizadas en este Capítulo. La notación utilizada combina las de Malinvaud (1971) y Mas-Colell, Whinston y Green. (1995).

a. Precios y mercancías

El vector de precios con horizonte finito es la lista $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_T)$, donde las componentes de $\mathbf{p}_t = (p_{1t}, \dots, p_{Lt}) \in R^L$ son los valores actuales en $t=0$ de los precios de los L bienes en t . Al ser cada precio un valor actual, el precio relativo $\frac{p_{Nt}}{p_{mt}}$ debe interpretarse como la cantidad del bien m que debe cederse en la fecha $t=\tau$, según acuerdo realizado en $t=0$, para obtener una unidad del bien l en $t=\tau$. Si elegimos como numerario el bien 1, en $t=0$, interpretaremos el precio p_{lt} como la cantidad del bien 1 que debería cederse en $t=0$ para adquirir el derecho a recibir una unidad del bien l en t .

A partir de las componentes de $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_T)$ podemos definir factores de descuento y tasas de interés correspondientes a cada bien. Así,

$$\beta_{lt} = \frac{p_{lt}}{p_{l0}}$$

es el factor de descuento correspondiente al bien l en t , y, a partir de

$$\frac{\beta_{l,t+1}}{\beta_{lt}} = \frac{p_{l,t+1}}{p_{lt}} = \frac{1}{1+r_{lt}}$$

se obtiene la tasa de interés r_{lt} correspondiente al bien l en t , que indica la cantidad de dicho bien que debe pagarse en $t+1$ por un préstamo realizado en t de una unidad del mismo bien. Por esta razón se dice que hay tasas de interés implícitas en $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_T)$.

Con horizonte infinito, el vector de precios es $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_t, \dots)$.

b. Preferencias

El consumidor debe elegir una trayectoria de consumo en $t=0$. Cuando consideramos un modelo con horizonte finito, con último período $t=T$, una trayectoria de consumo se escribe como $\mathbf{c}=(\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_T)$. Cuando el horizonte es infinito, la trayectoria de consumo se escribe como $\mathbf{c}=(\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_t, \dots)$.

Se supone que el consumidor es impaciente, es decir, que prefiere consumir una cierta cantidad de un bien antes que después. Además, que su utilidad en cada período depende sólo de su consumo en dicho período. Una función de utilidad que represente preferencias como las comentadas es, con horizonte finito,

$$V(\mathbf{c}) = \sum_{t=0}^T \delta^t u(\mathbf{c}_t)$$

y, con horizonte infinito,

$$V(\mathbf{c}) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t).$$

En ambas funciones, se supone que la utilidad en cada período es aditiva, y que el factor de descuento por impaciencia del consumidor es la constante $\delta \in (0,1)$. Para garantizar que $V(\mathbf{c}) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t) < \infty$, se supone que $\sup_t \|\mathbf{c}_t\| < \infty$.

Nótese que una función de este tipo tiene dos propiedades importantes: las preferencias son consistentes en el tiempo y la utilidad es recursiva. La consistencia temporal implica que una trayectoria de consumo que se supone óptima en $t=0$ no sería subóptima en el futuro. Que la utilidad sea recursiva implica que $V(\mathbf{c}) = u(\mathbf{c}_0) + \delta V(\mathbf{c}^1)$, siendo $u(\mathbf{c}_0)$ la utilidad presente y $V(\mathbf{c}^1)$ la utilidad futura.

c. Tecnología

El conjunto de planes de producción se definirá de modo que, habiendo L bienes en la economía, se especifique cuánto usa la empresa como insumos de cada uno, y cuánto obtiene como productos. A tal fin, escribiremos un plan de producción como

$$\mathbf{y} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in Y \subseteq R^{2L}$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_L) \in R^L$ es un vector de insumos y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_L) \in R^L$ es un vector de productos. Aun cuando autores como Mas-Colell *et. al.* (1995) mantienen la convención de signos sobre las componentes de los planes de producción, estableciendo que $a_i \leq 0$ y

$b_l \geq 0$ para todo l , nosotros seguiremos a Malinvaud (1971), y estableceremos que $a_l \geq 0$ y $b_l \geq 0$ para todo l .

Supondremos que el conjunto Y es cerrado y convexo. Además, supondremos que

- i. $Y \cap R_+^{2L} = \{0\}$ (no hay almuerzo gratis)
- ii. $Y - R_+^{2L} \subset Y$ (libre eliminación)
- iii. si $(a, b) \in Y$, entonces $(a, 0) \in Y$ (posibilidad de truncamiento)

En un modelo dinámico, esta notación permite considerar explícitamente dos acciones dentro del proceso productivo que ocurren en fechas distintas: la adquisición de insumos, que ocurre primero, y la obtención de productos, que ocurre después. Así, un plan de producción para la fecha t , y_t , según el cual sea tecnológicamente factible obtener el vector de productos b_{t+1} , tiene que indicar el vector de insumos necesarios, a_t , que debieron adquirirse previamente. Ello lo denotaremos como

$$y_t = (a_t, b_{t+1}) \in Y.$$

En este trabajo sólo consideraremos modelos *suaves*, es decir, modelos en los cuales la definición de plan de producción sea compatible con la definición de una función de transformación tal que, si $(a_t, b_{t+1}) \in \partial Y$,

$$g_t(a_t, b_{t+1}) = 0,$$

y que admita las derivadas

$$q_{a_t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_t}{\partial a_{1t}} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_t}{\partial a_{Lt}} \end{bmatrix} \quad q_{b_{t+1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_t}{\partial b_{1,t+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_t}{\partial b_{L,t+1}} \end{bmatrix}$$

con $\frac{\partial g_t}{\partial a_{lt}} < 0$ y $\frac{\partial g_t}{\partial b_{l,t+1}} > 0$. Con estas derivadas se obtienen las tasas marginales de transformación de insumos en insumos, insumos en productos y productos en productos. Como un ejemplo, presentamos la tasa marginal de sustitución de una unidad del insumo a_{lt} por el insumo a_{mt} :

$$TMST_{a_{it}, a_{mt}} = \left| \frac{da_{mt}}{da_{it}} \right| = \left| \frac{\partial g_t / \partial a_{it}}{\partial g_t / \partial a_{mt}} \right|.$$

Consideraremos dos tipos de modelos dinámicos: modelos con horizonte finito y con horizonte infinito. El lapso de tiempo sobre el cual se definen los primeros comienza en $t = 0$ y acaba en $t = T$. Los modelos con horizonte infinito también se definen sobre un lapso que comienza en $t = 0$, pero para el cual no se establece una fecha final.

En un modelo con horizonte finito, llamaremos trayectoria, o programa, de producción a la lista

$$(y_0, y_1, \dots, y_{T-1}, y_T)$$

siempre que $y_t \in Y$ para todo t .

En un modelo con horizonte finito, llamaremos trayectoria, o programa, de producción a la lista $(y_0, \dots, y_t, \dots)$.

En cada período, componentes de dos planes de producción sucesivos se solapan. Por ello, definimos un vector insumo-producto neto, que llamaremos

$$n_t = (b_t - a_t) \in R^L$$

En él anotamos el vector de insumos $a_t \in R^L$, necesario para obtener productos en $t+1$, y el vector de productos $b_t \in R^L$, obtenidos de la transformación de insumos adquiridos en $t-1$.

Con horizonte finito, establecemos que $b_0 = 0$ y que $a_T = 0$. Ello porque no proponemos la existencia de insumos disponibles antes de $t=0$, ni la conveniencia de reservar bienes como insumos en $t=T$, que permitan obtener productos en $t=T+1$.

Podemos ilustrar los conceptos presentados hasta ahora con la siguiente figura:

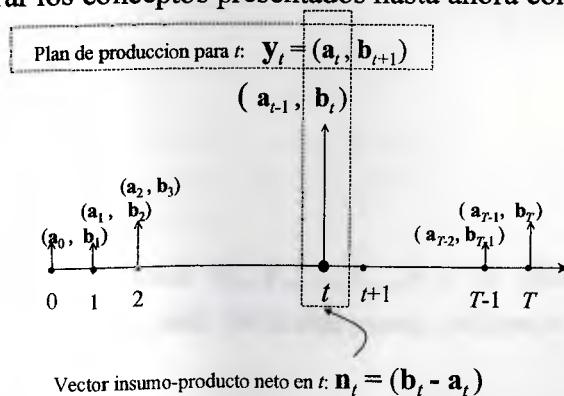


Figura V.1.1

Con horizonte infinito, establecemos que $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$.

2. Equilibrio Walrasiano y óptimo de Pareto en una economía con un consumidor y horizonte finito

Considerar los problemas de elección de consumidor y empresa bajo horizonte finito, y la definición correspondiente de la trayectoria de equilibrio, facilita el estudio de los mismos problemas bajo horizonte infinito. Este es el propósito de la siguiente sección.

a. El problema del consumidor

El problema del consumidor consiste en obtener una trayectoria de consumo que le permita maximizar su utilidad dada su restricción presupuestaria.

$$\text{Max}_{\{\mathbf{c}_t\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \delta^t u(\mathbf{c}_t)$$

sujeto a

$$\sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = w$$

A partir de la función de Lagrange,

$$L = \sum_{t=0}^T \delta^t u(\mathbf{c}_t) + \lambda \left[w - \sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t \right]$$

se obtienen las condiciones de optimización de primer orden

$$\delta^t \frac{\partial u(\mathbf{c}_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda p_{lt} \quad \begin{array}{l} t = 0, \dots, T \\ l = 1, \dots, L \end{array}$$

$$\sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = w.$$

b. El problema de la empresa

Diremos que una trayectoria $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{T-1}, \mathbf{y}_T)$ es eficiente si no existe otra trayectoria, $(\mathbf{y}'_0, \mathbf{y}'_1, \dots, \mathbf{y}'_{T-1}, \mathbf{y}'_T)$ a partir de la cual pueda obtenerse, para todo t ,

$$\mathbf{n}_t \leq \mathbf{n}'_t$$

con desigualdad estricta al menos para un t .

Dados $(y_0, \dots, y_T)$ y $(p_0, \dots, p_T)$, definimos el beneficio asociado al plan de producción y_t , actualizado a $t=0$, como

$$\pi_t = p_{t+1} \cdot b_{t+1} - p_t \cdot a_t$$

El problema de la empresa es

$$\max_{\{a_t, b_{t+1}\}_{t=0}^{T-1}} \sum_{t=0}^{T-1} \pi_t = \sum_{t=0}^{T-1} (p_{t+1} \cdot b_{t+1} - p_t \cdot a_t)$$

sujeto a

$$g_t(a_t, b_{t+1}) = 0, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

A partir de la función de Lagrange

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} (p_{t+1} \cdot b_{t+1} - p_t \cdot a_t) + \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t [0 - g_t(a_t, b_{t+1})]$$

podemos obtener las condiciones de primer orden

$$\begin{cases} p_{t+1} - \lambda_t q_{b_{t+1}} = 0 \\ -p_t - \lambda_t q_{a_t} = 0 \end{cases} \quad t = 0, \dots, T-1$$

que, para cada bien, pueden escribirse como

$$\begin{cases} p_{l,t+1} = \lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial b_{l,t+1}} > 0 \\ p_{lt} = -\lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial a_{lt}} > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, L \\ t = 0, \dots, T-1 \end{matrix}$$

De tales condiciones se deduce un resultado importante: los precios relativos de los bienes deben ser iguales a las tasas marginales de sustitución correspondientes. A continuación consideremos dos ejemplos:

$$TMST_{a_{lt}, a_{mt}} = \left| \frac{da_{mt}}{da_{lt}} \right| = \left| \frac{\partial g_t / \partial a_{lt}}{\partial g_t / \partial a_{mt}} \right| = \frac{p_{lt}}{p_{mt}}, \quad TMST_{a_{lt}, b_{l,t+1}} = \left| \frac{db_{l,t+1}}{da_{lt}} \right| = \left| \frac{\partial g_t / \partial a_{lt}}{\partial g_t / \partial b_{l,t+1}} \right| = \frac{p_{lt}}{p_{l,t+1}}$$

Recuérdese que cada mercancía se vende al mismo precio sea como producto o como insumo en cada período t . Por ello, también es cierto que

$$TMST_{b_t, b_{mt}} = \left| \frac{db_{mt}}{db_t} \right| = \left| \frac{\partial g_t / \partial b_t}{\partial g_t / \partial b_{mt}} \right| = \frac{p_{lt}}{p_{mt}}, \quad TMST_{b_t, a_{l,t+1}} = \left| \frac{da_{l,t+1}}{db_t} \right| = \left| \frac{\partial g_t / \partial b_t}{\partial g_t / \partial a_{l,t+1}} \right| = \frac{p_{lt}}{p_{l,t+1}}$$

Dos conclusiones pueden extraerse de las condiciones de optimización obtenidas:

1. Dados un vector de precios $(p_0, \dots, p_T)$ y un vector de insumos inicial a_0 , puede calcularse una trayectoria eficiente $(y_0, \dots, y_T)$.
2. Dadas una trayectoria eficiente $(y_0, \dots, y_T)$ y un vector de precios inicial, definido como $p_0 = q_{a_0}$, o a partir de un bien numerario (de modo que, por ejemplo, $p_{l_0} = 1$), es posible construir un vector de precios $(p_0, \dots, p_T)$ que dé soporte a $(y_0, \dots, y_T)$.

Un tipo particular de trayectoria de producción merece especial atención. Se dice que la trayectoria $(y_0, \dots, y_T)$ es estacionaria, o un estado estacionario, si para todo t se cumple que $y_t = \bar{y} = (\bar{a}, \bar{b}) \in Y$. Si una trayectoria estacionaria es eficiente, existen un $p_0 \in R^L$ y un $\beta \in R$ tales que es posible construir un vector de precios $(p_0, \beta p_0, \dots, \beta^T p_0)$ que dé soporte a $(\bar{y}, \dots, \bar{y})$. Podemos demostrar esta afirmación recurriendo a las condiciones de primer orden ya comentadas. Recordando que las coordenadas de los vectores q_{a_t} y $q_{b_{t+1}}$ no varían el tiempo, escribiremos $\bar{q}_a$ y $\bar{q}_b$, de modo que las condiciones son

$$\begin{cases} p_{t+1} - \lambda_t \bar{q}_b = 0 \\ -p_t - \lambda_t \bar{q}_a = 0 \end{cases} \quad t = 0, \dots, T-1$$

Puesto que se cumple que

$$\begin{aligned} p_t - \lambda_{t-1} \bar{q}_b &= 0 & t &= 1, \dots, T \\ -p_{t+1} - \lambda_{t+1} \bar{q}_a &= 0 & t &= -1, \dots, T-2 \end{aligned}$$

también se cumple que

$$p_{t+1} = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} p_t = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}} p_t.$$

Con $\beta = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}$, podemos verificar que

$$\mathbf{p}_{t+1} = \beta \mathbf{p}_t = \beta^2 \mathbf{p}_{t-1} = \dots = \beta^{t+1} \mathbf{p}_0,$$

con lo que probamos la afirmación anterior. Para este caso, podemos obtener una única tasa de interés r implícita en el vector $(\mathbf{p}_0, \beta \mathbf{p}_0, \dots, \beta^T \mathbf{p}_0)$, puesto que, como presentamos antes, $\beta = \frac{1}{1+r}$.

Debe notarse que la teoría de los estados estacionarios requiere suponer que el ambiente donde se toman las decisiones de producción no varía en el tiempo.

c. Equilibrio Walrasiano

Un equilibrio Walrasiano es un par formado por una trayectoria $(\mathbf{y}_0^*, \dots, \mathbf{y}_T^*)$ y una sucesión $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_T)$, ambas acotadas, tales que

- i. $\forall t \quad \mathbf{c}_t^* = \mathbf{n}_t^* + \omega_t \geq 0$
- ii. $\text{Max}_{\{\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}\}_{t=0}^{T-1}} \sum_{t=0}^{T-1} \pi_t = \sum_{t=0}^{T-1} (\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t)$ sujeto a $g_t(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) = 0, \quad t = 0, \dots, T-1$.
- iii. La trayectoria $(\mathbf{c}_0^*, \dots, \mathbf{c}_T^*)$ es una solución del problema del consumidor,

$$\text{Max}_{\{\mathbf{c}_t\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \delta^t u(\mathbf{c}_t) \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = w,$$

siendo $\mathbf{n}_t^* = (\mathbf{b}_t^* - \mathbf{a}_t^*)$, $\pi_t^* = (\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1}^* - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t^*)$ y $w = \sum_{t=0}^T (\pi_t^* + \mathbf{p}_t \cdot \omega_t)$.

Aparte del cambio en la notación y en la interpretación de los subíndices, la definición de equilibrio en un modelo dinámico con horizonte finito es formalmente igual a la del equilibrio en un modelo estático. Por ello, ambos teoremas del bienestar se satisfacen en este caso.

3. Equilibrio Walrasiano y óptimo de Pareto en una economía con un consumidor y horizonte infinito

En esta sección se consideran los problemas de elección intertemporal de consumidor y empresa, se definen las trayectorias de equilibrio y se indican los supuestos necesarios para probar los teoremas del bienestar.

a. El problema del consumidor

Una trayectoria $(c_0, \dots, c_t, \dots)$ maximiza la utilidad miopeamente o a corto plazo en un conjunto presupuestario determinado por $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ y $w < \infty$ si es imposible incrementar la utilidad con una nueva trayectoria que transfiera poder de compra entre dos períodos consecutivos. Llamando w_t al valor presente en t del poder de compra de dos períodos consecutivos, el problema de maximización miope de la utilidad es

$$\text{Max}_{c_t, c_{t+1}} u(c_t) + \delta u(c_{t+1}) \quad \text{sujeto a} \quad p_t \cdot c_t + p_{t+1} \cdot c_{t+1} = w_t.$$

A partir de la función de Lagrange,

$$L = u(c_t) + \delta u(c_{t+1}) + \lambda_t [w_t - (p_t \cdot c_t + p_{t+1} \cdot c_{t+1})]$$

se obtienen las condiciones de primer orden

$$w_t = p_t \cdot c_t + p_{t+1} \cdot c_{t+1}$$

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda_t p_{lt} \quad \delta \frac{\partial u(c_{t+1})}{\partial c_{l,t+1}} = \lambda_t p_{l,t+1} \quad \begin{array}{l} t = 0, 1, \dots \\ l = 1, \dots, L \end{array}$$

de las cuales se deduce que, para $\lambda = \lambda_0$,

$$\delta' \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda p_{lt} \quad \begin{array}{l} t = 0, 1, \dots \\ l = 1, \dots, L \end{array}$$

puesto que, siendo

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda_t p_{lt} \quad \delta \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda_{t-1} p_{lt} \quad \begin{array}{l} t = 1, 2, \dots \\ l = 1, \dots, L \end{array}$$

se cumple que $\lambda_{t-1} = \delta \lambda_t$, se sigue que $\lambda = \lambda_0 = \delta' \lambda_t$.

Puede demostrarse que una trayectoria $(c_0, \dots, c_t, \dots)$ que satisface las condiciones

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t \cdot c_t = w$$

y

$$\delta' \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{lt}} = \lambda p_{lt} \quad \begin{array}{l} t = 0, 1, \dots \\ l = 1, \dots, L' \end{array}$$

maximiza la utilidad en un conjunto presupuestario determinado por $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ y $w < \infty$.

b. El problema de la empresa

Si el horizonte del modelo es infinito, la trayectoria de producción será la sucesión

$$(y_0, \dots, y_t, \dots)$$

siempre que $y_t \in Y$ para todo t .

Diremos que una trayectoria $(y_0, \dots, y_t, \dots)$ es eficiente si no existe otra trayectoria, $(y'_0, \dots, y'_t, \dots)$ a partir de la cual pueda obtenerse, para todo t , y con desigualdad estricta para al menos un t ,

$$n'_t \geq n_t$$

siendo $n_t = (b_t - a_t) \in R^L$ el vector insumo-producto neto en t correspondiente a $(y_0, \dots, y_t, \dots)$.

Una trayectoria $(y_0, \dots, y_t, \dots)$ maximiza el beneficio miopemente o a corto plazo para $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ si, para todo t y todo $y'_t = (a'_t, b'_{t+1}) \in Y$, se cumple que

$$p_{t+1} \cdot b_{t+1} - p_t \cdot a_t \geq p_{t+1} \cdot b'_{t+1} - p_t \cdot a'_t.$$

La sucesión $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ para el cual $(y_0, \dots, y_t, \dots)$ maximiza el beneficio miopemente es llamada sistema de precios de Malinvaud.

Una trayectoria $(y_0, \dots, y_t, \dots)$ que maximiza el beneficio miopemente para $(p_0, \dots, p_t, \dots)$, y que a medida que $t \rightarrow \infty$ cumpla $p_{t+1} \cdot b_{t+1} \rightarrow 0$, condición llamada de transversalidad, es eficiente. Para probar dicha afirmación, demostraremos que una trayectoria no convergente no puede satisfacer ambos requisitos.

La prueba se presenta en cuatro pasos:

1. Suponemos dadas las trayectorias $(y_0, \dots, y_t, \dots)$ y $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ tales que $(y_0, \dots, y_t, \dots)$ maximiza el beneficio y cumple con la condición de

transversalidad, sin ser eficiente, por lo que existe un $(y'_0, \dots, y'_t, \dots)$ tal que $\mathbf{n}'_t > \mathbf{n}_t$ y, por tanto, $\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}'_t > \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}_t$.

2. Para un T lo suficientemente grande podemos hallar un ε tal que $\sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}'_t > \sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}_t + \varepsilon$. Puesto que $\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$, para un T lo suficientemente grande podemos hallar $\mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1} < \varepsilon$, con lo que

$$\sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}'_t > \sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}_t + \mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1}.$$

3. Puesto que, con $\mathbf{n}_t = (\mathbf{b}_t - \mathbf{a}_t)$, $\pi_t = (\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_t)$ y $\mathbf{b}_0 = 0$, se cumple que

$$\sum_{t=0}^T \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{n}_t = \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}_T + \sum_{t=0}^{T-1} \pi_t,$$

podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$\mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}'_T + \sum_{t=0}^{T-1} \pi'_t > \sum_{t=0}^T \pi_t.$$

4. La última desigualdad viola el supuesto de maximización miope del beneficio: al menos debe cumplirse una de la siguientes desigualdades: o $\pi'_t > \pi_t$ para algún $t = 0, \dots, T-1$, o $\mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}'_T > \pi_T$.

c. Equilibrio Walrasiano

Un equilibrio Walrasiano es un par formado por una trayectoria $(y^*_0, \dots, y^*_t, \dots)$ y una sucesión $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_t, \dots)$, ambas acotadas, tales que

i. $\forall t \quad \mathbf{c}^*_t = \mathbf{n}^*_t + \omega_t \geq 0$

ii. $\forall t, \forall y \in Y \quad \pi^*_t \geq \pi_t$

iii. la trayectoria $(\mathbf{c}^*_0, \dots, \mathbf{c}^*_t, \dots)$ es una solución del problema del consumidor,

$$\text{Max}_{\{\mathbf{c}_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t) \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t = w$$

donde $\mathbf{n}^*_t = (\mathbf{b}^*_t - \mathbf{a}^*_t)$, $\pi^*_t = (\mathbf{p}_{t+1} \cdot \mathbf{b}^*_{t+1} - \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}^*_t)$ y $w = \sum_{t=0}^{\infty} (\pi^*_t + \mathbf{p}_t \cdot \omega_t) < \infty$.

Dos versiones de los teoremas del bienestar se presentan a continuación.

c.1. Primer teorema del bienestar

Para que un equilibrio Walrasiano sea óptimo de Pareto, a partir de la trayectoria $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$ debe obtenerse una trayectoria $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ que resuelva el siguiente problema, llamado problema de planeación:

$$\text{Max}_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t) \quad \text{sujeto a} \quad c_t = n_t + \omega_t \geq 0$$

siendo $n_t = (b_t - a_t) \in R^L$.

Según la definición del equilibrio, la trayectoria $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ resuelve el problema

$$\text{Max}_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t) \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_t \cdot c_t = w$$

con $w = \sum_{t=0}^{\infty} (\pi_t^* + p_t \cdot \omega_t) < \infty$ y $\pi_t^* = (p_{t+1} \cdot b_{t+1}^* - p_t \cdot a_t^*)$, por lo que basta con probar que ambos conjuntos presupuestarios son iguales. Probaremos esto al probar que la condición de transversalidad se cumple siempre que $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$ y $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ constituyen un equilibrio Walrasiano. Demostramos dicha afirmación a continuación:

1. De la restricción de factibilidad $c_t^* = n_t^* + \omega_t \geq 0$ se deducen $p_t \cdot c_t^* = p_t \cdot (n_t^* + \omega_t)$ y

$$\sum_{t=0}^T p_t \cdot c_t = \sum_{t=0}^T (\pi_t + p_t \cdot \omega_t) + p_{T+1} \cdot b_{T+1}.$$

2. Puesto que los valores presentes de gasto y riqueza se igualan en el límite,

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t \cdot c_t = \sum_{t=0}^{\infty} (\pi_t + p_t \cdot \omega_t) = w, \text{ se cumple que } p_{T+1} \cdot b_{T+1} \rightarrow 0 \text{ a medida que } T \rightarrow \infty.$$

Ello implica que la trayectoria $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$ es eficiente.

c.2. Segundo teorema del bienestar

Una trayectoria $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$ óptimo de Pareto constituye un equilibrio Walrasiano junto con una sucesión $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ convenientemente definida. Presentamos la prueba a continuación, en dos partes. En primer lugar, demostramos que a partir de la trayectoria de consumo factible $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ puede definirse una sucesión

de precios para la cual $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ maximice la utilidad del consumidor sujeto al conjunto presupuestario definido por $(p_0, \dots, p_t, \dots)$.

1. Utilizando las condiciones de primer orden del problema de optimización del consumidor sujeto a un conjunto presupuestario y una trayectoria $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ que resuelva el problema de planeación, puede proponerse una sucesión $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ que soporte la trayectoria $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ como elegida por el consumidor en un equilibrio Walrasiano. El precio propuesto para cada bien l en cada t es $p_{lt} = \delta^t \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{lt}}$.
2. Puesto que $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ es acotada, $\sum_{t=0}^{\infty} \|p_t\| < \infty$, y la condición de transversalidad se cumple, por lo que $\sum_{t=0}^{\infty} p_t \cdot c_t = \sum_{t=0}^{\infty} (\pi_t + p_t \cdot \omega_t) = w$. Ello implica que la trayectoria $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ pertenece al conjunto presupuestario definido por $(p_0, \dots, p_t, \dots)$, y que en él maximiza la utilidad del consumidor.

En segundo lugar, probamos que si la trayectoria $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ resuelve el problema de planeación, y los precios se definen por medio de $p_{lt} = \delta^t \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{lt}}$, la trayectoria $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$ maximiza el beneficio miopeamente para $(p_0, \dots, p_t, \dots)$. La prueba se realiza demostrando que es contradictorio suponer lo contrario.

1. Comenzamos por definir la trayectoria $(y'_0, \dots, y'_t, \dots)$, tal que $y'_t \neq y_t^*$ si $t = T$ y $y'_t = y_t^*$ si $t \neq T$. La trayectoria de consumo asociada es $(c'_0, \dots, c'_t, \dots)$. Si $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$ óptimo de Pareto, entonces $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (u(c_t^*) - u(c'_t)) \geq 0$.
2. Supondremos que y'_T se encuentra lo suficientemente cerca de y_T^* , de modo que, haciendo uso del teorema del valor medio, podamos determinar el signo de

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (u(c_t^*) - u(c'_t)) = \delta^T (u(c_T^*) - u(c'_T)) + \delta^{T+1} (u(c_{T+1}^*) - u(c'_{T+1}))$$

por medio del signo de

$$\delta^T \nabla u(c_T^*) \cdot (c_T^* - c'_T) + \delta^{T+1} \nabla u(c_{T+1}^*) \cdot (c_{T+1}^* - c'_{T+1}).$$

Recordemos, antes de continuar, que $\nabla u(c_t) = \left(\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{1t}}, \dots, \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_{Lt}} \right)$, y que, según

el teorema del valor medio, para cada δ^t existe un $\hat{c}_t$ tal que $\delta^t [u(c_t^*) - u(c'_t)] = \delta^t \nabla u(\hat{c}_t) \cdot (c_t^* - c'_t)$.

3. Si adoptamos $\mathbf{p}_t = \delta^t \nabla u(\mathbf{c}_t^*)$, y recordamos que $\mathbf{c}_t = (\mathbf{b}_t - \mathbf{a}_t) + \omega_t$ y $\mathbf{y}_t = (\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) \in Y$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \delta^T \nabla u(\mathbf{c}_T^*) \cdot (\mathbf{c}_T^* - \mathbf{c}_T') + \delta^{T+1} \nabla u(\mathbf{c}_{T+1}^*) \cdot (\mathbf{c}_{T+1}^* - \mathbf{c}_{T+1}') \\ &= \mathbf{p}_T \cdot (-\mathbf{a}_T^* + \mathbf{a}_T') + \mathbf{p}_{T+1} \cdot (\mathbf{b}_{T+1}^* - \mathbf{b}_{T+1}') \\ &= (\mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1}^* - \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}_T^*) - (\mathbf{p}_{T+1} \cdot \mathbf{b}_{T+1}' - \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{a}_T') \\ &= \pi_T^* - \pi_T' \end{aligned}$$

4. Notemos que sólo puede cumplirse $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (u(\mathbf{c}_t^*) - u(\mathbf{c}_t')) \geq 0$ si $\pi_T^* \geq \pi_T'$. Ello debe cumplirse para cualquier T , por lo que $(\mathbf{c}_0^*, \dots, \mathbf{c}_t^*, \dots)$ es óptimo de Pareto sólo si $(\mathbf{y}_0^*, \dots, \mathbf{y}_t^*, \dots)$ maximiza el beneficio miopemente para $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_t, \dots)$, siendo $\mathbf{p}_t = \delta^t \nabla u(\mathbf{c}_t^*)$.

4. Propiedades de las trayectorias de equilibrio en una economía con un consumidor y horizonte infinito

A continuación, se comentan las propiedades de existencia, unicidad, computabilidad, estacionariedad y estabilidad de las trayectorias de equilibrio.

a. Existencia

Gracias al segundo problema del bienestar pueden establecerse las condiciones para la existencia del equilibrio Walrasiano. Si la función objetivo del problema de planeación de dimensión infinita es continua, y el conjunto restricción es compacto, el problema tiene solución y existe una trayectoria de consumo compatible con un equilibrio Walrasiano.

b. Unicidad

Si se supone que la función $u(\mathbf{c}_t)$ es estrictamente cóncava, es imposible que dos trayectorias de consumo $(\mathbf{c}_0', \dots, \mathbf{c}_t', \dots)$ y $(\mathbf{c}_0'', \dots, \mathbf{c}_t'', \dots)$ distintas resuelvan el mismo problema de planeación. A partir de ambas trayectorias, la convexidad de Y permite obtener una nueva trayectoria formada por $\mathbf{c}_t''' = \frac{1}{2} \mathbf{c}_t' + \frac{1}{2} \mathbf{c}_t''$. Obsérvese que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t''') > \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t') = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{c}_t'') = \gamma,$$

por lo que no más de una trayectoria de consumo conduce a una trayectoria $(\mathbf{y}_0^*, \dots, \mathbf{y}_t^*, \dots)$ óptimo de Pareto. Por nuestra discusión precedente, esto implica que el equilibrio Walrasiano es único.

c. Computabilidad

Resolver el problema de planeación permite hallar las trayectorias $(c_0^*, \dots, c_t^*, \dots)$ y $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$. Definiendo una sucesión de precios por medio de $p_t = \delta' \nabla u(c_t^*)$ para $t \geq 0$, obtenemos el equilibrio Walrasiano. El equilibrio Walrasiano es, por tanto, computable.

Consideraremos un caso particular para ilustrar el modo de plantear y resolver el problema de planeación. En este caso, supondremos una economía con $(N+1)$ sectores, en la cual existen N bienes de capital y un único bien de consumo. En términos del problema matemático no hay diferencia entre no incluir una dotación de trabajo y suponer que la cantidad de trabajo es constante en cada período. Nosotros no incluiremos el trabajo en la dotación del consumidor. Ni el bien de consumo. Sólo una cantidad de cada bien de capital en $t = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (\bar{k}, 0) \\ \omega_t &= 0 \quad t = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Supondremos que k_0 se utiliza para producir k_1 , y, conjuntamente con k_1 , para producir el bien de consumo $c(k_0, k_1)$. Del mismo modo, k_1 se utilizará para producir k_2 y $c(k_1, k_2)$. Y así sucesivamente. El plan de producción $y_t = (a_t, b_{t+1}) \in Y$ para este caso está formado por

$$\begin{aligned}a_t &= (k_t, 0) \\ b_{t+1} &= (k_{t+1}, c(k_t, k_{t+1})), \quad \text{para } t = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

y la trayectoria de consumo por

$$c_t = (0, c(k_{t-1}, k_t)) = b_t - a_t \quad \text{para } t = 1, 2, \dots$$

Por comodidad, escribiremos $u(c_t) = u((0, c(k_{t-1}, k_t))) \equiv u(k_{t-1}, k_t)$ y, por convención, haremos $u(k_{-1}, k_0) = 0$. El problema de planeación del consumidor es

$$\text{Max}_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(k_{t-1}, k_t)$$

sujeto a

$$\begin{aligned}k_0 &= \bar{k} \\ k_t &\geq 0 \\ c_t(k_{t-1}, k_t) &\geq 0.\end{aligned}$$

Los pares consecutivos que satisfacen las restricciones impuestas forman el conjunto A , que supondremos convexo. Las trayectorias formadas de modo que $(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) \in A \subset R^{2N}$ son llamadas admisibles.

Resolver el problema implica determinar una sucesión $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots)$ admisible (es decir, que satisfaga las restricciones) tal que el valor $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$ sea máximo.

Para intentar hacerlo, se recurre a la programación dinámica, que permite convertir este problema en otro que acepte soluciones recursivas.

Comenzamos definiendo la función de valor del planeador,

$$V(\bar{\mathbf{k}}) = \text{Max}_{\{\mathbf{k}_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$$

que expresa el valor óptimo del problema original, comenzando con una condición inicial arbitraria, $\mathbf{k}_0 = \bar{\mathbf{k}}$. Mientras el problema no se resuelva, la función valor es desconocida.

Aun así, es posible probar que, si una trayectoria $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots)$ resuelve el problema, cualquier porción de la trayectoria es óptima para un problema apropiado definido a partir del original y utilizando la misma, y aun desconocida, función de valor. Esta afirmación, conocida como principio del óptimo de Bellman, justifica utilizar la función $V(\cdot)$ a partir de $\mathbf{k}_1$, de modo que

$$V(\mathbf{k}_1) = \text{Max}_{\{\mathbf{k}_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=2}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t).$$

Haciendo uso del principio de óptimo, afirmamos que

$$\text{Max}_{\{\mathbf{k}_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) = \text{Max}_{\mathbf{k}_1} \left[\delta u(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1) + \text{Max}_{\{\mathbf{k}_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=2}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) \right],$$

y, utilizando la función valor, podemos escribir

$$V(\bar{\mathbf{k}}) = \text{Max}_{\mathbf{k}_1} [\delta u(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1) + V(\mathbf{k}_1)].$$

En general, debe cumplirse que

$$V(\mathbf{k}_{t-1}) = \text{Max}_{\mathbf{k}_t} [\delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) + V(\mathbf{k}_t)].$$

Esta ecuación, conocida como ecuación de Bellman, puede escribirse de un modo más general (y más frecuentemente utilizado) si expresa en valores corrientes en t . Para ello, se define la función de valor corriente en t , con condición inicial $\mathbf{k}_{t-1}$ como

$$v(\mathbf{k}_{t-1}) = \frac{V(\mathbf{k}_{t-1})}{\delta^t}$$

obteniéndose la

$$v(\mathbf{k}_{t-1}) = \text{Max}_{\mathbf{k}_t} [u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) + \delta v(\mathbf{k}_t)].$$

Es frecuente evitar el uso de subíndices. Con ello se enfatiza que la función $V(\cdot)$ es invariante con respecto al tiempo. Nuestra ecuación de Bellman en valores corrientes puede escribirse como

$$v(\mathbf{k}) = \text{Max}_{\mathbf{k}'} [u(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \delta v(\mathbf{k}')].$$

siendo el punto $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \geq 0$ elemento de un conjunto convexo que satisface la condición $c(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \geq 0$.

Como hemos indicado previamente, la función $v(\cdot)$ es desconocida. Sin embargo, es posible establecer condiciones para garantizar su existencia y unicidad. A pesar de no detenernos en el argumento, observemos que si es posible definir un operador T tal que

$$Tv(\mathbf{k}) = \text{Max}_{\mathbf{k}'} [u(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \delta v(\mathbf{k}')]]$$

la función v resuelve la ecuación de Bellman si y sólo si es un punto fijo de T , esto es, si $v = Tv$. Bajo algunos supuestos, T puede ser una contracción, y su punto fijo existe y es único.

Para resolver la ecuación debe determinarse otra función desconocida, llamada función de política $\psi(\cdot)$, por medio de la cual se determina el vector óptimo $\mathbf{k}'$ a partir de $\mathbf{k}$. Por ser función de funciones, la ecuación de Bellman es una ecuación funcional: su solución requiere un par de funciones $v(\cdot)$ y $\psi(\cdot)$ tales que

$$v(\mathbf{k}) = u[\mathbf{k}, \psi(\mathbf{k})] + \delta v[\psi(\mathbf{k})]$$

donde $\mathbf{k}' = \psi(\mathbf{k})$.

Nótese que el problema original era hallar una trayectoria admisible $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots)$ que resolviese el problema $\text{Max}_{\{\mathbf{k}_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$. El nuevo problema exige

hallar dos funciones desconocidas, $v(\cdot)$ y $\psi(\cdot)$, que satisfagan la ecuación de Bellman. Si ello se logra, puede obtenerse la trayectoria $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots)$ recursivamente: si $\mathbf{k}_0 = \bar{\mathbf{k}}$, entonces

$$(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots) = (\bar{\mathbf{k}}, \psi(\bar{\mathbf{k}}), \psi(\psi(\bar{\mathbf{k}})), \dots).$$

Consideraremos tres métodos para resolver la ecuación de Bellman que hemos presentado [ver Ljungqvist y Sargent (2000)].

1. Iteración de funciones valor: gracias al teorema de la contracción, puede definirse una sucesión de funciones $\{v_n\}$ por medio de $v_{n+1} = Tv_n$, partiendo de $v_0 = 0$, convergerá a la función $v(\cdot)$ que resuelva la ecuación de Bellman.
2. Adivinar y verificar: se propone una función como solución, y se verifica si la ecuación es satisfecha por una trayectoria admisible.
3. Ecuaciones de Euler: supongamos que el problema ya ha sido resuelto. Se dispone de una trayectoria admisible $(\hat{\mathbf{k}}_0, \hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2, \dots)$, estrictamente interior a A , para la cual la función $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$ alcanza su máximo. Para hallar el vector $\mathbf{k}_t$, suponiendo conocidos todos los demás elementos de la trayectoria óptima, debe resolverse el problema

$$\text{Max}_{\mathbf{k}_t} \delta^t u(\hat{\mathbf{k}}_{t-1}, \mathbf{k}_t) + \delta^{t+1} u(\mathbf{k}_t, \hat{\mathbf{k}}_{t+1})$$

cuyas condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial u(\hat{\mathbf{k}}_{t-1}, \hat{\mathbf{k}}_t)}{\partial k_{n+N,t}} + \delta \frac{\partial u(\hat{\mathbf{k}}_t, \hat{\mathbf{k}}_{t+1})}{\partial k_{n,t}} = 0 \quad \text{para} \quad \begin{matrix} t = 1, 2, \dots \\ 1 \leq n \leq N \end{matrix}$$

La trayectoria óptima debe satisfacer estas condiciones. A partir de ellas, podemos buscar la trayectoria óptima. Comenzamos con $t=1$. Dado el vector $\hat{\mathbf{k}}_0 = \bar{\mathbf{k}}$, las condiciones de primer orden forman un sistema de N ecuaciones con $2N$ incógnitas, constituidas por el par $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$. Fijando arbitrariamente un vector $\mathbf{k}_1$, obtenemos un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, que puede resolverse para $\mathbf{k}_2$. Con $t=2$, disponiendo de un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, y del par $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, podemos obtener $\mathbf{k}_3$. Y así sucesivamente: las ecuaciones de Euler inducen un sistema de ecuaciones en diferencias cuya condición inicial es $(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{k}_1)$.

Notemos que el punto clave en este método de solución es la elección de $\mathbf{k}_1$. Luego de resolver el sistema de ecuaciones en diferencias con condición inicial es $(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{k}_1)$, y manteniendo fijo $\bar{\mathbf{k}}$, se elige un $\mathbf{k}_1$ que permita generar una sucesión

acotada e infinita tal que $(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t) \in A \subset R^{2N}$. De hallarse tal sucesión, hemos determinado la función de política $\psi(\cdot)$.

d. Estados estacionarios y estabilidad

Ahora bien, ¿cómo puede ser la función $\psi(\cdot)$? Según el teorema Boldrin-Montrucchio [ver Becker y Boyd III (1997)], *cualquier* función $\psi(\cdot)$ puede generarse a partir de algún $u(\mathbf{k}_{t-1}, \mathbf{k}_t)$ y algún $\delta > 0$. Consideraremos tan sólo algunos casos.

En primer lugar, supongamos que $\bar{\mathbf{k}} = \psi(\bar{\mathbf{k}})$, con $\mathbf{k}_0 = \bar{\mathbf{k}}$. En este caso, la trayectoria de producción es estacionaria, $(\bar{\mathbf{y}}, \dots, \bar{\mathbf{y}}, \dots)$. Podemos llamar dicha trayectoria regla de oro si, dado $\mathbf{p}_0$, es miopemente soportada por precios constantes, $\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_0$. La llamaremos regla de oro modificada si el sistema de precios que la soporta miopemente es $\mathbf{p}_t = \beta' \mathbf{p}_0$, y $\beta = \delta$. Esta última igualdad utiliza la condición de primer orden para maximizar la utilidad del consumidor dentro de su conjunto presupuestario, $\mathbf{p}_t = \delta' \nabla u(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}})$. Si las sucesiones de precios (normalizadas) se definen de este modo, las soluciones de los problemas de optimización de la empresa y el consumidor son consistentes.

En segundo lugar, supondremos que una función $\psi(\cdot)$ tiene un punto fijo, $\bar{\mathbf{k}}$, donde $\bar{\mathbf{k}} = \psi(\bar{\mathbf{k}})$, pero que también puede generar valores $\mathbf{k}' = \psi(\mathbf{k})$ tales que $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$. En este caso, existen varias trayectorias óptimas, y, entre ellas, una única trayectoria estacionaria regla de oro modificada. Según el teorema del peaje (*turnpike theorem*) [ver Becker y Boyd III (1997)], si la función $u(\cdot, \cdot)$ es estrictamente cóncava y el consumidor es lo suficientemente paciente (δ se encuentra lo suficientemente cerca de 1), la función $\psi(\cdot)$ es una contracción. Ello implica que la única trayectoria estacionaria que existe atrae cualquier trayectoria óptima posible desde cualquier posición inicial. En este caso, se dice que el estado estacionario es globalmente estable, puesto que $\mathbf{k}_t \rightarrow \bar{\mathbf{k}}$ desde cualquier $\mathbf{k}_0$. Podemos apreciar dicho resultado en el siguiente gráfico:

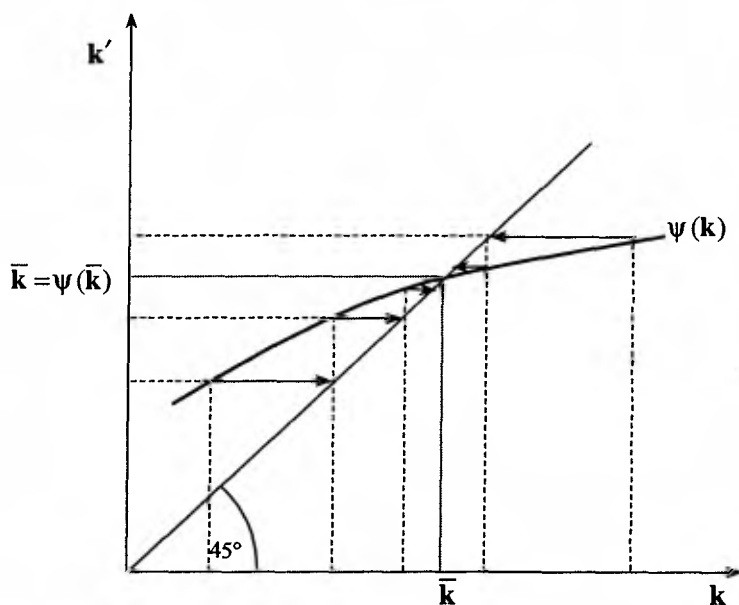


Figura V.3.1

Por el teorema Boldrin-Montrucchio, sabemos que podemos generar cualquier $\psi(\cdot)$ a partir de una función $u(\cdot, \cdot)$ es cóncava y un $\delta > 0$, por lo que una trayectoria estacionaria no necesariamente es globalmente estable. Uno de los casos más interesantes que podemos considerar se ilustra a continuación:

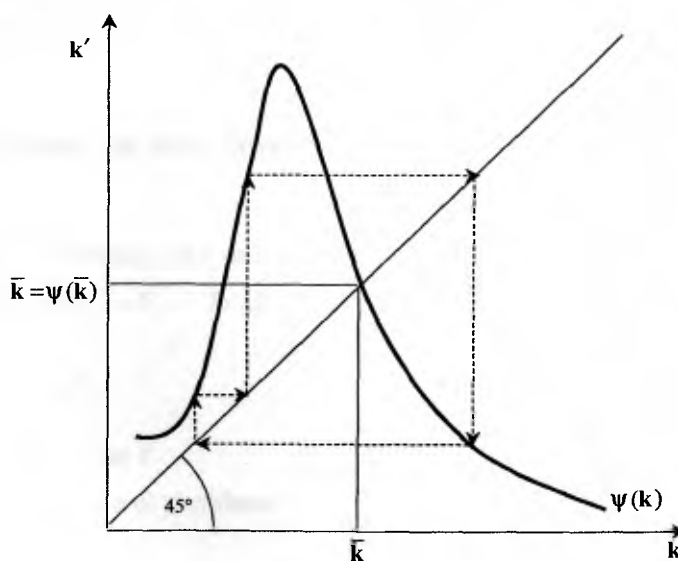


Figura V.3.2

Además de tener un punto fijo, la función $\psi(\cdot)$ genera una órbita 3-periódica: el sistema ilustrado presenta un comportamiento caótico. Ello implica que la trayectoria de equilibrio puede ser compleja, y dependiente de las condiciones iniciales de un modo difícilmente calculable.

En tercer lugar, ilustremos un caso en el cual la función $\psi(\cdot)$ tiene más de un punto fijo:

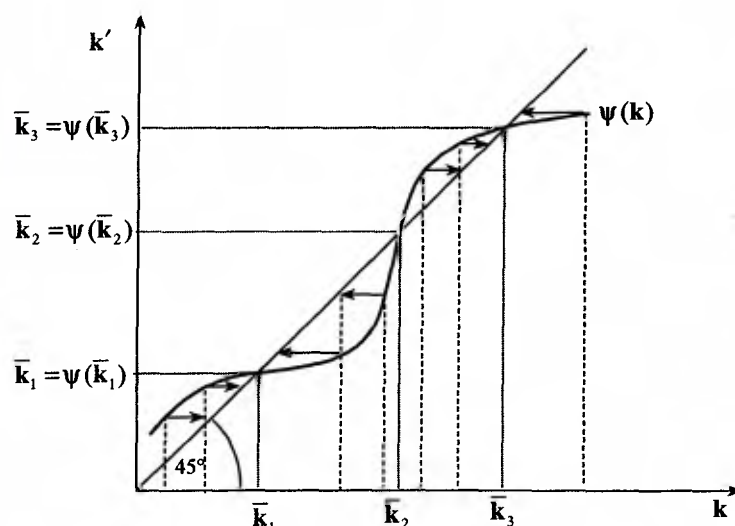


Figura V.3.3

En este caso, los puntos fijos $\bar{k}_1$ y $\bar{k}_3$ implican dos trayectorias de estado estacionario localmente estables, y el punto $\bar{k}_2$ implica una trayectoria localmente inestable. En este caso, aun es cierto que desde cualquier k_0 el sistema tiende hacia algún estado estacionario.

4. Equilibrio Walrasiano en una economía con varios consumidores y horizonte infinito

Un equilibrio Walrasiano para una economía con I consumidores es definido por las sucesiones acotadas $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$, $(p_0, \dots, p_t, \dots) \geq 0$ y $(c_{0i}^*, \dots, c_{ti}^*, \dots) \geq 0$ tales que

- i. $\sum_i c_{it}^* = n_t^* + \sum_i \omega_{it} \quad \forall t$
- ii. $\pi_t^* \geq \pi_t \quad \forall y_t = (a_t, b_{t+1}) \in Y$
- iii. $(c_{0i}^*, \dots, c_{ti}^*, \dots) \geq 0$ resuelve el problema

$$\text{Max}_{(c_i)_{i=1}^{\infty}} \sum_t \delta_t^i u_i(c_i) \text{ sujeto a } \sum_t p_t \cdot c_{it} \leq \sum_t \theta_{it} \cdot \pi_t + \sum_t p_t \cdot \omega_{it} = w_i$$

Si se supone que $\delta_t = \delta$, es posible probar que existe un vector $(\eta_1, \dots, \eta_I)$ tal que las sucesiones $(y_0^*, \dots, y_t^*, \dots)$ y $(p_0, \dots, p_t, \dots) \geq 0$ constituyen un equilibrio

Walrasiano cuya función de utilidad, $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t)$ se obtiene tomando como $u(c_t)$ la solución de

$$\text{Max} \sum_{i=1}^I \eta_i u_i(c_{it}) \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^I c_{it} \leq c_t.$$

La pruebas presentadas para el caso de un único consumidor pueden extenderse al caso de múltiples consumidores, si el equilibrio Walrasiano se define de este modo [ver Mas-Colell, Whinston y Green. (1995).].

5. Resumen

En este Capítulo se incorporó el tiempo en el modelo del equilibrio general, aunque de un modo muy peculiar. Se supone que los parámetros del modelo no cambian en el tiempo, y que los agentes deben tomar decisiones consistentes con la optimización de valores presentes en $t=0$ de funciones de utilidad y beneficio. Un modelo dinámico de este tipo requiere mercados completos, y difícilmente puede representar procesos históricos.

Además de estas limitaciones, el modelo tiene otras. Del mismo modo que el teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu, el de Boldrin-Montrucchio afirma que para cualquier trayectoria óptima puede definirse un consumidor. Eso deja abierta la posibilidad para comportamientos caóticos dentro del sistema dinámico, que dificulten la interpretación de los resultados. Impedir tales inconvenientes exige añadir restricciones sobre el problema que reducen su generalidad.

VI. Importancia de la teoría del equilibrio general

Introducción

Hemos realizado hasta ahora una exposición básicamente técnica de la teoría del equilibrio general, el resultado más completo de la escuela neoclásica. En este Capítulo intentaremos justificar la importancia de su estudio.

Por un lado, consideraremos algunas importantes aplicaciones de la teoría del equilibrio general en el desarrollo de la macroeconomía desde la década de los cuarenta hasta hoy. Por otro, presentaremos algunas críticas realizadas contra la teoría, que han dado fundamento a nuevos enfoques para el estudio de la economía.

1. Macroeconomía y teoría del equilibrio general

Walras (1987) distinguió los objetivos de la economía como ciencia pura, como ciencia moral y como arte. Su teoría del equilibrio general era ciencia pura, y como tal no pretendía servir más que para explicar el funcionamiento del sistema de precios “tal como es”. En este sentido, buscar aplicaciones “prácticas” quedaba fuera de su interés. Sin embargo, la explicación de los sistemas “tal como son” tiene un extraordinario efecto sobre la justificación de la intervención o no de los gobiernos en la actividad económica. Uno de los ejemplos más notables de esta afirmación es comentado por Shumpeter (1975) y Stiglitz (1994), quienes anotan la teoría del socialismo de mercado como un resultado de los trabajos de Pareto que no pudieron ofrecer los socialistas antes que él.

En estas breves notas no nos ocuparemos de la teoría del socialismo de mercado. Nuestra atención se centrará, en cambio, en la importancia que la teoría de Walras ha tenido para el desarrollo de la macroeconomía. Es especialmente recomendable el libro de Farmer (1993) para obtener una exposición de libro de texto e importantes referencias bibliográficas.

Al analizar el sistema de Walras, Shumpeter (1975, pág. 199) comenzó por hacer notar que “...determinar los valores de equilibrio de todas las variables económicas, a saber, los precios de todos los productos y factores y las cantidades de todos los productos y factores que podrían comprarse en una situación de equilibrio perfecto y de competencia pura, por todas las familias y empresas ..., supone la determinación de los ingresos individuales, tanto como la de los grupos y el total del ingreso social”. Por ello, la “microanalítica”, o análisis de la determinación de cantidades compradas y vendidas por familias y empresas individuales, desarrollada por Walras, comprendía, a diferencia de la de Marshall, aspectos “macroanalíticos” como la determinación del empleo total de la sociedad. Shumpeter insistía en que “... no es correcto contrastar el ... macroanálisis, por ejemplo, de tipo keynesiano, con el microanálisis walrasiano, como si este último

fuera una teoría que prescinde, y que tiene necesidad de ser complementada, con el ... macroanálisis”.

Microanálisis y macroanálisis. Microeconomía y macroeconomía. La teoría de Walras ciertamente trataba algunos problemas macroeconómicos, como la determinación del empleo, a través de las decisiones de individuos racionales precio aceptantes. Sin embargo, dentro de la tradición económica del siglo XIX, dejó de lado otros, tan importantes como el problema de los ciclos económicos y el papel del dinero en la determinación de las magnitudes reales de la economía. Según Lucas (1980), Keynes abordó el problema de los ciclos, esencialmente dinámico, con una teoría estática del equilibrio, de tipo marshalliano, eliminando la ecuación de oferta de trabajo del modelo. Samuelson (1957) habría añadido una teoría estática del equilibrio general, con un modelo dinámico de ajuste de precios basado en las condiciones de estabilidad de Walras. Los trabajos de Samuelson parecían indicar que era posible construir un sistema tal que la teoría neoclásica explicara un equilibrio general que fuese estado estacionario y óptimo de Pareto para el sistema, y donde las teorías Keynesianas explicaran el comportamiento del sistema fuera de dicho equilibrio. Este programa de investigación, que incluía la incorporación del dinero en los modelos de equilibrio general “reales”, fue llamado síntesis neoclásico-Keynesiana, y se llevó a cabo entre las décadas de los 40 y 60 del siglo XX. Según ella, los ciclos económicos eran fallas de mercado, y las políticas de los gobiernos que mantuvieran la economía cerca del “equilibrio de pleno empleo” eran bien recibidas. Según Lucas (1980), los esfuerzos por “unificar” ambas teorías condujeron a través de “impecables” razonamientos neoclásicos, a desechar uno de los pilares de la síntesis: la curva de Phillips, según la cual existía un intercambio entre inflación y desempleo. Además, la extensión de la teoría estática del equilibrio general a economías con tiempo e incertidumbre a través de la definición de mercancías contingentes abrió las puertas a la introducción de las expectativas racionales en los modelos macroeconómicos, y a la construcción de nuevos modelos de equilibrio que tienen en cuenta los ciclos económicos.

Lucas, uno de los autores más influyentes de la llamada escuela de los nuevos clásicos, o de las expectativas racionales, es uno de los principales exponentes de la aplicación de modelos de equilibrio general del tipo Arrow-Debreu a la macroeconomía. Dos de sus trabajos más importantes se reseñan a continuación. Debe advertirse, sin embargo, que lo que se ha expuesto en este trabajo sobre la teoría del equilibrio general es aun insuficiente para abordar la lectura de los artículos mencionados.

a. Inversión bajo incertidumbre

Lucas y Prescott (1971) propusieron un nuevo concepto de equilibrio, partiendo de modelos de equilibrio general dinámicos y con incertidumbre, para el estudio de la inversión en una industria competitiva cuya demanda se desplaza aleatoriamente en cada período. El equilibrio de Lucas y Prescott (1971) es un punto en un espacio de funciones de unas pocas “variables de estado” que permitiría determinar las trayectorias de equilibrio del acervo de capital, las tasas de inversión, el producto y el precio del producto para la industria como un todo y para cada una de las empresas que la

constituyen. En este modelo de inversión bajo incertidumbre, se dota a las empresas de una regla de predicción de precios futuros (o predicción de la demanda futura) que genera la trayectoria de inversión que, junto con la demanda de la industria, genera una serie de precios actuales. Lucas y Prescott (1971) suponen que las expectativas son racionales en el sentido de Muth (1961), es decir, que los precios actuales y futuros tienen la misma distribución de probabilidad. Con ello, su teoría vinculaba la inversión actual con variables explicativas actuales y pasadas y no con variables esperadas: precios actuales y esperados se determinan simultáneamente. Los autores pueden probar que su equilibrio existe y es único, y deducir el comportamiento del equilibrio de la industria en el tiempo bajo supuestos alternativos sobre la naturaleza de los desplazamientos de la demanda.

b. La neutralidad del dinero

Lucas (1972, pág. 66) se propuso examinar "... una economía en la cual precios y cantidades de equilibrio exhibieran lo que puede ser el rasgo central de la teoría moderna del ciclo económico: una relación sistemática entre la tasa de cambio en los precios nominales y el nivel de producto real." Para ello diseña un modelo utilizando el concepto de equilibrio de Lucas y Prescott (1971), con el cual "... la curva de Phillips emerge no como un hecho empírico no explicado, sino como un rasgo central de la solución de un sistema de equilibrio general" [Lucas (1972, pág. 84)].

En este modelo, todos los precios debían vaciar los mercados, todos los agentes comportarse óptimamente dados sus objetivos y expectativas y todas las expectativas debían formarse de modo óptimo, es decir, racionalmente en el sentido de Muth (1961). El marco de análisis era neoclásico, excepto por la eliminación del supuesto de información completa para todas las transacciones.

Para incorporar el dinero en su economía, Lucas (1972) utilizó un modelo de generaciones solapadas. En él, los únicos bienes serían trabajo, producto y dinero emitido por el gobierno a favor de los viejos. El dinero sirve para que los viejos compren el producto obtenido por los jóvenes.

Para justificar la transmisión imperfecta de información a través de los precios, Lucas (1972) supone que las transacciones ocurren en mercados separados, y que los precios relativos y nominales pueden variar por *shocks* estocásticos diferentes no revelados a los agentes: por un lado, cambios estocásticos en la demanda en cada mercado afectan los precios relativos. Por otro, cambios estocásticos en la cantidad de dinero afectan los precios nominales. Si los individuos pudiesen saber si los cambios de precios son relativos o nominales, sus decisiones de intercambio sólo cambiarían en el primer caso.

Lucas obtiene una curva de Phillips (no neutralidad del dinero) excluyendo cualquier fuente de ilusión monetaria, utilizando un modelo donde precios y cantidades de equilibrio son funciones definidas sobre un espacio vectorial de posibles estados de la economía. Al mismo tiempo, preserva los resultados clásicos de neutralidad del dinero en el largo plazo.

A pesar de haber sido rechazado por la primera revista donde Lucas quiso publicarlo, y de ser de una lectura definitivamente exigente, este trabajo tuvo una extraordinaria influencia sobre el desarrollo posterior de la teoría económica [ver, por ejemplo, Guesnerie (2001)]. Sus conclusiones fueron destructivas en más de un aspecto: las políticas (monetarias) de los gobiernos podían ser irrelevantes para afectar permanentemente las magnitudes reales de la economía, tales como producto y empleo, en la dirección deseada por los gobiernos. Tales políticas podían, por el contrario, agravar problemas de información dentro de la economía, dificultando la asignación eficiente de recursos en respuesta a cambios observados de precios. Además, la evaluación de los efectos de las políticas quedaba fuera del alcance de los modelos econométricos de su tiempo, por lo que sus resultados eran impredecibles. El fracaso de los modelos macroeconómicos de inspiración Keynesiana a fines de la década de los sesenta, y los fundamentos microeconómicos del modelo de Lucas, que le permitieron considerar el tiempo, la incertidumbre, la información incompleta y la formación de expectativas dentro de un marco de equilibrio general, dieron a su trabajo un extraordinario poder de persuasión.

Los trabajos de los nuevos Keynesianos debieron recurrir a fundamentos microeconómicos para recuperar la idea de la relevancia de las políticas de los gobiernos y la confianza en su evaluación econométrica. Sin embargo, a pesar de aceptar la hipótesis de las expectativas racionales, en general abandonaron el enfoque del equilibrio general y se detuvieron en rigideces de precios, debidas a contratos, poder de mercado, fallas de coordinación o fallas de mercado para rechazar conclusiones basadas en modelos con economías competitivas. Es recomendable revisar la colección de trabajos reunida por Mankiw y Romer (1991).

2. Debilidades de la teoría del equilibrio general

La teoría del equilibrio general es, como hemos visto, una teoría matemática. En ello radican sus fortalezas y sus debilidades. Paradójicamente, algunos de los resultados más impresionantes de la teoría han contribuido a debilitar su poder explicativo. North (1999, pág. 316) resume buena parte de las críticas a "...las más elegantes estructuras matemáticas de la teoría neoclásica moderna..." afirmando que "...ha venido a ser cada vez más precisa sobre cada vez menos..."

En esta sección, comentamos tres de los supuestos más criticados de la teoría del equilibrio general.

a. La definición de los agentes

Para probar la existencia del equilibrio general y el segundo teorema del bienestar, supusimos que preferencias y tecnologías eran convexas, y que consumidores (racionales) y empresas resuelven problemas de maximización restringida bien definidos dados los precios de bienes y servicios. Eliminar alguno de dichos supuestos destruye las demostraciones obtenidas. Sin embargo, tales supuestos fueron duramente criticados

desde frentes no necesariamente excluyentes por North, Selten, Sen, Simon y Stiglitz, entre otros economistas influyentes. Útiles referencias a sus trabajos pueden hallarse en Alt, Levi y Ostrom (1999), Hogarth y Reder (1987), Sen (1997) y Stiglitz (1994).

Una de las críticas más contundentes reprocha al modelo neoclásico no tener en cuenta los costos de transacción en situaciones de información incompleta, es decir, los costos de medir las propiedades de los bienes que se desea transar y los costos de garantizar el cumplimiento obligatorio de los contratos. La existencia de dichos costos justifica el estudio de los incentivos de los individuos y obliga a repensar el concepto de empresa como una unidad tecnológica con una única función objetivo relevante. Además, permite explicar la existencia de ineficiencias sociales debidas a las asimetrías de información que los gobiernos no pueden corregir, y que obligan a tener en cuenta problemas de azar moral y selección adversa en la realización de contratos [ver Laffont (1991) y Laffont y Martimort (2002)].

El supuesto de racionalidad implica que todo consumidor sabe lo que quiere y lo que puede hacer, y actúa en consecuencia. Para los economistas que se acercaron a la psicología, la racionalidad es limitada, y no tiene sentido definirla dentro de un conjunto de axiomas, sino explorar empíricamente los procesos cognoscitivos. Para otros, como North (1999, pág. 315), que han estudiado "...la historia económica de diez milenios, pensar que los seres humanos supieron lo que hacían y actuaron de acuerdo con ello es ridículo..." puesto que "han operado sobre la base de ideologías, creencias, prejuicios y medias verdades a través de la historia, y lo siguen haciendo".

La defensa de la teoría neoclásica en base al "como si" de Friedman (1953) difícilmente resiste las críticas presentadas. Y, si se rechaza el supuesto neoclásico de racionalidad, no tiene sentido discutir la existencia del equilibrio Walrasiano ni las implicaciones de los teoremas del bienestar tal como lo hemos hecho.

b. Los mercados completos

Extender los teoremas del bienestar de la teoría estática del equilibrio general requiere de la existencia de tantos mercados como estados de la naturaleza deban considerarse en el futuro. De no existir tales mercados, las pruebas presentadas pierden su poder. Y, según Stiglitz (1994), la existencia de un conjunto completo de mercados es conceptualmente imposible. Consideremos tres de sus razones. En primer lugar, porque los costos de transacción de mantener infinitos mercados y tomar infinitas decisiones en $t = 0$ serían insoportables. En segundo lugar, porque la existencia de mercados completos para mercancías heterogéneas implicarían mercados con agentes que podrían tener poder de mercado, contradiciendo el supuesto de competencia perfecta. En tercer lugar, porque no es posible suponer que en $t = 0$ todos los mercados para bienes que resulten de innovaciones tecnológicas futuras puedan estar disponibles.

Cuando los mercados son incompletos, tal como apunta Salanié (2000), el equilibrio puede no existir (aunque ello ocurra sólo en un conjunto de especificaciones de funciones de utilidad, recursos iniciales y activos cuya medida de Lebesgue sea cero). Si

el equilibrio existe, puede no ser un óptimo de Pareto. Si el gobierno se supone que no dispone de instrumentos (por la misma incompletitud de los mercados) para lograr una asignación Pareto superior a la de equilibrio, se dice que la asignación es un óptimo restringido de Pareto. En aquellos casos en los que el gobierno contara con alguna ventaja sobre los agentes, las exigencias de información sobre el gobierno podría hacer impracticable la reasignación.

Si los mercados fuesen completos, por otra parte, tendríamos problemas para justificar la existencia de los bancos [ver Freixas y Rochet (1997)].

Para una discusión adicional sobre la teoría de los mercados incompletos, ver Hens (1998).

c. La competencia perfecta

La competencia perfecta es un supuesto *a priori* colocado sobre la teoría del equilibrio general, que impone la Ley de la Estrategia Excluida [Shumpeter (1975)] sobre los resultados del modelo. Gale (2000, pág. 5), entre las razones que presenta para dotar a la teoría del equilibrio general de fundamentos estratégicos, afirma que con ello "...estamos obligados a construir un juego donde la competencia perfecta es sólo uno de muchos posibles resultados. Entonces demostramos que bajo ciertas condiciones la competencia surge como un único resultado de equilibrio".

Salanié (2000) comenta algunos de los problemas que aún no han podido resolverse para desarrollar un modelo del tipo Arrow-Debreu con información imperfecta. Aquí sólo comentaremos uno: el objetivo de las empresas es afectado cuando las empresas tienen poder de mercado y sus dueños son consumidores del bien que producen. Nótese que, si bien la utilidad indirecta del dueño aumenta con el beneficio al aumentar el precio del bien, se reduce también al encarecerse el bien de consumo. Para preservar el objetivo de maximización del beneficio de las empresas, es necesario suponer que el efecto debido al beneficio es el mayor sobre la utilidad de todos los dueños. Y esto es un poco arbitrario.

Sobre el problema de definir un modelo de equilibrio general con oligopolios, ver Shubik (1992).

d. Ausencia de instituciones que evolucionen en el tiempo

North (1990) ha criticado la ausencia de una teoría del estado, de las instituciones y de las organizaciones en la teoría neoclásica, y ha afirmado que la historia y las ideas son relevantes para la explicación del desempeño económico. Aun habiendo expuesto modelos dinámicos en este trabajo, la teoría neoclásica no tiene en cuenta el tiempo, entendido como la "...dimensión en la cual ideas, instituciones y creencias evolucionan" [North (1999), pág. 316]. Al dejar fuera del análisis la historia, y los incentivos creados durante su transcurso, la teoría neoclásica no puede explicar la persistencia de instituciones ineficientes durante siglos, y su tendencia a perpetuarse.

e. *¿Cuál óptimo de Pareto?*

Uno de los rasgos deseables de los modelos teóricos es su capacidad para ofrecer una única respuesta a la pregunta que se le formule. Sabemos que, si se cumplen los supuestos habituales, podemos elegir un óptimo de Pareto que sea soportado por un vector de precios de equilibrio Walrasiano. ¿Entre cuantos óptimos podemos elegir? Entre infinitos. ¿Existe la posibilidad de elegir uno entre ellos con una regla de elección social racional que respete la soberanía de los consumidores? Según Arrow (1963), es imposible: una regla de elección social es racional si coincide con la que puede derivarse de las preferencias de un dictador racional. Campbell (1992), Salanié (2000) y Sen (1997) estudian algunos casos más generales que el propuesto por Arrow (1963).

El teorema de la imposibilidad de Arrow introduce serias advertencias con respecto a la "justicia" relacionada con la elección social, y hace inevitable la consideración de los juicios de valor de quienes hacen tal elección.

3. Resumen

La importancia de la teoría del equilibrio general en economía ha sido extraordinaria. El uso de las matemáticas ha hecho posible plantear algunos de los problemas no resueltos por los economistas del siglo XIX utilizando conceptos explícitos y un método inmune a contradicciones. Ello se ha podido hacer al costo de adoptar supuestos muy restrictivos, que han iluminado las condiciones bajo las cuales podrían lograrse los resultados esperados por los clásicos y los escollos que lo impedirían.

Los nuevos métodos permitieron replantear los problemas asociados con la relevancia y consecuencias de las políticas del gobierno. Los supuestos explícitos y los implícitos de la teoría recibieron apoyos y críticas que han dado lugar a nuevos desarrollos en la teoría económica, y, por tanto, en los objetivos e instrumentos de la política económica. A pesar de las duras críticas contra la teoría del equilibrio general, su papel en el desarrollo del pensamiento económico ha sido esencial. El siguiente párrafo de Shumpeter (1975, pág. 10), con el que deseo terminar este trabajo, ilustra muy bien el proceso de renovación, consolidación y destrucción de las ideas económicas, y la deuda que las nuevas ideas tienen con las viejas:

A estas "revoluciones" [de 1870] siguieron dos décadas de luchas y discusiones más o menos acaloradas. Y de éstas surgió, a su vez, en los años noventas, una típica situación clásica en el sentido en que nosotros entendemos ésta, cuyas obras principales pusieron de manifiesto un gran campo común y sugieren una idea de reposo, factores ambos que produjeron en el observador superficial una impresión de algo acabado, la impresión de un templo griego que proyecta sus líneas perfectas en un cielo sin nubes. Pero hacia la última década antes del estallido de la primera Guerra Mundial, hasta los observadores superficiales podrían haber percibido signos de decadencia, de nuevas fisuras en perspectiva, de revoluciones que todavía no han desembocado en otra situación clásica.

Bibliografía

- Alligood, K; Sauer, T y Yorke, J. (1997), *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems*, New York, Editorial Springer-Verlag, 603 p.
- Apostol, T. (1982) *Análisis matemático, segunda edición*, España, Editorial Reverte, S.A., 596 p.
- Armstrong, M.A . (1983) *Basic Topology*, USA, Springer-Verlag New York Inc., 251 p
- Arrow, K. y Debreu, G. (1952). "Existence of an equilibrium for a competitive economy" en Debreu, G (1983), p 68-97
- Arrow, K. (1963) *Social Choice and Individual Values*, USA, Courier Companies, Inc., 124 p
- Arrow, K. (1987) "Rationality of Self and Others in an Economic System" en Hogarth, R. y Reder, M., p 201-216.
- Arrow, K. y Hahn, F.H (1977) *Análisis General Competitivo*, Mexico, Fondo de Cultura Económica, 526 p
- Beardon, A. (1997) *Limits A New Approach to Real Analysis*, USA, Springer-Verlag New York Inc., 189 p
- Berge, C. (1997) *Topological spaces*, USA, Dover Publications, Inc., 270 p
- Border, K. (1985) *Fixed Point Theorems With Applications to Economics and Game Theory* , USA, Cambridge University Press, 129 p
- Campbell, D. (1992) *Equity Efficiency, and Social Choice*, USA, Clarendon Press Oxford, 188 p
- Debreu, G. (1953) "Valuation equilibrium and Pareto optimum" en Debreu, G (1983), p 98-104
- Debreu, G. (1953) "Economics under uncertainty" en Debreu, G (1983), p 115-119
- Debreu, G. (1983) *Mathematical Economics*, USA, Cambridge University Press, 250 p
- Debreu, G. (1987) *Theory of Value An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Yale University Press New Haven and London , 114 p
- Debreu, G. (1998) "Existence" en Kirman, A (1998), p 10-37
- Duffie, D. (2001) *Dynamic Asset Pricing Theory*, USA, Princeton University Press
- Ellickson, B. (1993) *Competitive Equilibrium Theory and Applications*, USA, Cambridge University Press, 394 p
- Farmer, R. (1993), *The Macroeconomics of Self-Fulfilling Prophecies*, USA, MIT, 259 p
- Freixas, X. y Rochet, J. (1997) *Microeconomics of Banking*, USA, The MIT Press
- Fuente, A. (1999), *Mathematical Methods and Models for Economists*, USA, Cambridge University Press, 835 p

- Gale, D. (2000), *Strategic Foundations of General Equilibrium*, United Kingdom, Cambridge University Press, 207 p
- Glaewe, W., Goll, P (1982) *Lógica Matemática, Teoría de Conjuntos y Dominios Numéricos*, Cuba, Pueblo y Educación, 319 p
- Gemignani, M. (1972) *Elementary Topology*, USA, Dover Publications, Inc., 270 p
- Hammond, P. (1998) "The Efficiency Theorems and Market Failure" en Kirman, A (1998), p 211-260
- Holmgren, R. (1996), *A First Course In Discrete Dynamical Systems*, New York, Editorial Springer-Verlag, 223 p.
- Henderson, J. y Quandt, R. (1995) *Teoría Microeconómica*. 3ª ed. Barcelona: Ariel Economía, 534 p
- Hens, T. (1998) "Incomplete Markets" en Kirman, A (1998), p 139-210
- Hicks, J.R. (1952) *Valor y Capital*, Mexico, Fondo de Cultura Económica, 403p
- Hilborn, R.(1994) *Chaos and Nonlinear Dynamics*, USA, Oxford University Press, 620 p.
- Hildenbrand, W. y Kirman, A. (1998) "The Core and Competitive Equilibrium" en Kirman, A (1998), p 261-290
- Hoching. J., and Young G. (1961) *Topology*, USA, Dover Publications, Inc., 374 p
- Hogarth, R. y Reder, M. (Ed) (1987), *Rational Choice*, USA, The University of Chicago Press, 317 p
- Kehoe, T. (1998) "Uniqueness and Stability" en Kirman, A (1998), p38-87
- Kirman, A (1998) *Elements General Equilibrium Analysis*, USA, Blackwell Publishers, 296 p
- Kreps, D. (1990). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton: Princeton University Press.
- Kuhn, H. y S. Nasar (2002), *The Essential John Nash*, USA, Princeton University Press, 243 p
- Laffont, J. (1991), *Economie de l'incertain et de l'information*, Paris, Economica, 301 p
- Laffont, J. y Martimort, D. (2002), *The Theory of Incentives*, USA, Princeton University Press, 417 p
- Ljungqvist, L. y T. Sargent (2000) *Recursive Macroeconomic Theory*, USA, MIT Press, 701 p.
- Luemberger, D. (1998), *Investment Science*, USA, Oxford University Press, 477 p
- Malinvaud, E. (1971) *Leçons de Théorie Microéconomique*, Paris, Dunod, 275 p
- Marsden, J., Hoffman, M (1998) *Análisis Clásico Elemental*, USA, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. 735 p
- Mas-Colell, A., M. Whinston and J. Green. (1995). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.
- Maunder, C.R.F. (1996) *Algebraic Topology*, USA, Dover Publications, Inc., 375 p
- Medio, A. (1992), *Chaotic Dynamics*, USA, Cambridge University Press, 321 p.
- Mendelson, B . (1975) *Introduction To Topology*, USA, Dover Publications, Inc., 206 p

- Nash, J. (1950), "Non-Cooperative Games" en Kuhn, H. y S. Nasar (2002), p 85-98
- Pontryagin, L. S. (1999) *Foundations of Combinatorial Topology*, USA, Dover Publications, Inc., 92 p
- Quirk, J. y R. Saposnik (1972), *Introducción a la Teoría del Equilibrio General y a la Economía del Bienestar*, España, Bosch, Casa Editorial, 270 p
- Salanié, B. (2000), *Microeconomics of Market Failures*, USA, The MIT Press, 221p
- Samuelson, P. (1957), *Fundamentos del Análisis Económico*, Argentina, El Ateneo, 461 p.
- Savage, L. (1972), *The Foundations of Statistics*, USA, Dover Publications, Inc., 305 p
- Scarf, H. (1998) "The Computation of Equilibrium Prices" en Kirman, A (1998), p88-138
- Shubik, M. (1992), *Economía Política : Un Enfoque desde el Punto de Vista de la Teoría del Juego*, México, Fondo de Cultura Económica, 660 p
- Schumpeter, J. (1975), *Historia del Análisis Económico, Tomo 2*, Mexico, Fondo de Cultura Económica, 493 p
- Sen, A (1997) *Choice, Welfare and Measurement*, USA, Harvard University Press, 460 p
- Silberberg, E. (1990). *The Structure of Economics*. 2ª ed. Nueva York: McGraw-Hill.
- Starr, R (1997) *General Equilibrium Theory an Introduction*, USA, Cambridge University Press, 250 p
- Stiglitz, J. (1994), *Whither Socialism?*, USA, The MIT Press, 279 p
- Stephen, B. (1989) *Experiments in Topological*, USA, Dover Publications, Inc., 210 p
- Stokey, N. y R. Lucas con E. Prescott (1989) *Recursive Methods in Economics Dynamics*, USA, Harvard University Press
- Takayama, A. (1993) *Analytical Methods in Economics*, USA, The Michigan University Press, 671 págs
- Varian, H. (1992). *Microeconomic Analysis*. 3ª ed. Nueva York: W.W. Norton and Company. (versión castellana en Barcelona: Antoni Bosh editor, 1992)
- Villar, A. (2001) *Lecciones de microeconomía*, España, Antoni Bosch, 482 p
- Wall, C.T.C. (1972) *A Geometric Introduction to Topology*, USA, Dover Publications, Inc., 167 p
- Walras, L. (1987), *Elementos de economía política pura*, España, Alianza Editorial, S. A., 813 p