

REPUBLICA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y SOCIALES
ESCUELA DE ECONOMIA

**ECUACIONES DIFERENCIALES
EN MODELOS DE ECONOMIA DINAMICA.
PRIMERA APROXIMACION.**

Trabajo especial de grado para
optar por el título de Economista

PROF-ASESOR: OSWALDO RODRIGUEZ
BR. RONALD BALZA GUANIPA

CARACAS, ABRIL 1993

A mis padres.

A quienes supieron escucharme.

A quienes me sintieron más acá de la amistad.

¿Qué es el tiempo? Un misterio sin realidad propia y omnipotente. Es una condición del mundo fenomenal, un movimiento mezclado y unido a la existencia de los cuerpos en el espacio y a su movimiento. Pero ¿habría tiempo si no hubiese movimiento? ¡Es inútil preguntar! ¿Es el tiempo función del espacio? ¿O es lo contrario? ¿Son ambos una misma cosa? ¡Es inútil continuar preguntando! El tiempo es activo, produce. ¿Qué produce? Produce el cambio. El ahora no es el entonces, el aquí no es el allí, pues entre ambas cosas existe siempre el movimiento. Pero como el movimiento por el cual se mide el tiempo es circular y se cierra sobre sí mismo, ese movimiento y ese cambio se podrían calificar perfectamente de reposo y de inmovilidad. El entonces se repite sin cesar en el ahora, y el allá se repite en el aquí. Y como, por otra parte, a pesar de los más desesperados esfuerzos, no se ha podido representar un tiempo finito ni un espacio limitado, se ha decidido creer que el tiempo y el espacio son eternos e infinitos con la esperanza de conseguir una explicación más perfecta. Pero, al establecer el postulado de lo eterno y lo infinito, ¿no se destruye lógica y matemáticamente todo lo finito y todo lo limitado? ¿No queda todo reducido a cero? ¿Es posible una sucesión en lo eterno? ¿Es posible una superposición en lo infinito? ¿Cómo poner de acuerdo estas hipótesis auxiliares de lo eterno y de lo infinito con los conceptos de distancia, movimiento y cambio? ¿No queda más que la presencia de los cuerpos limitados en el universo? ¡Es inútil preguntar!

_Figuraos que el tiempo gira en una rueda cuyo diámetro es infinito; bajo esta rueda inmensa hay una multitud innumerable de ruedas, unas dentro de otras; la del centro es imperceptible, y da un número infinito de vueltas precisamente en el mismo tiempo en que la rueda grande no da más que una. Claro es que todas las cosas, desde el principio hasta el fin del mundo, pueden acontecer sucesivamente en mucho menos tiempo que la milésima parte de un segundo, y puede afirmarse que en efecto es así.

_No entiendo nada _dijo Rustán.

_Si queréis _prosiguió Topacio_, tengo un papagayo que os lo hará comprender fácilmente: nació algún tiempo antes del Diluvio; estuvo en el arca, ha visto mucho; sin embargo, no tiene más que año y medio de edad: él os contará su historia, que es muy interesante.

_Id en seguida a buscar vuestro papagayo _ordenó Rustán_; él me divertirá hasta que pueda volverme a dormir.

Voltaire. EL BLANCO Y EL NEGRO.

Evidentemente prosiguió el Viajero a través del Tiempo todo cuerpo real debe extenderse en cuatro direcciones: debe tener Longitud, Anchura, Espesor y ... Duración. Existen en realidad cuatro dimensiones, tres a las que llamamos planos del Espacio, y una cuarta, el Tiempo. Hay, sin embargo, una tendencia a establecer una distinción imaginaria entre las tres primeras dimensiones y la última, porque sucede que nuestra consciencia se mueve por intermitencias en una dirección a lo largo de la última desde el comienzo hasta el fin de nuestras vidas.

Eso dijo un muchacho muy joven, haciendo esfuerzos espasmódicos para encender de nuevo su cigarro encima de la lámpara, eso ... es, realmente, muy claro.

H. G. Wells. LA MAQUINA DEL TIEMPO (Capítulo primero).

And yet, and yet ... Negar la sucesión temporal, negar el yo, negar el universo astronómico, son desesperaciones aparentes y consuelos secretos. Nuestro destino (a diferencia del infierno de Swedenborg y del infierno de la mitología tibetana) no es espantoso por irreal; es espantoso porque es irreversible y de hierro. El tiempo es la sustancia de que estoy hecho. El tiempo es un río que me arrebató, pero yo soy el río; es un tigre que me destroza, pero yo soy el tigre; es un fuego que me consume, pero yo soy el fuego. El mundo, desgraciadamente, es real; yo, desgraciadamente, soy Borges.

Jorge Luis Borges. NUEVA REFUTACION DEL TIEMPO

(en Otras Inquisiciones).

FE DE ERRATAS

pág. 101. El último párrafo debe leerse antes de "Retornemos al caso ..."

pág. 120. En la 3ra. línea del 4to. párrafo se lee "El primer conjunto es medido en divisas, y el segundo en moneda nacional.". Debe leerse "El primer conjunto es medido en unidades de bienes transables, y el segundo en unidades de bienes no transables.".

pág. 120. En la 4ta. línea del 5to. párrafo se lee "... por el índice de precios P_T , (...)" . Debe leerse "... por el precio P_T , (...)" .

Nota: Las últimas dos correcciones deben hacerse siempre que una situación similar se presenta en las páginas siguientes.

INDICE.

Introducción	pág. i
CAPITULO I. ECUACIONES DIFERENCIALES:	
ASPECTOS GENERALES	1
a. Definición	1
b. Clasificación y notación	2
b.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias	2
b.1.1. Ecuaciones diferenciales lineales	3
b.1.2. Ecuaciones diferenciales no lineales	4
b.2. Ecuaciones diferenciales parciales	4
c. Ecuaciones diferenciales, equilibrio y estabilidad	5
CAPITULO II. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	
A. Ecuaciones lineales	9
a. El caso más sencillo	9
b. El caso más complejo	11
c. Primera nota sobre estabilidad. Dos casos con coeficientes constantes.	14
B. Ecuaciones no lineales	15
CAPITULO III. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES	
DE ORDEN SUPERIOR	18
A. Conceptos básicos sobre espacios lineales, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales	18
a. Espacios lineales o vectoriales generales	18
b. Transformaciones lineales	20
c. Sistemas de ecuaciones lineales	23

B.	La ecuación diferencial de n -ésimo orden expresada por medio de un operador lineal. L	pág. 25
a.	Uso de la notación vectorial	26
b.	Importancia del núcleo de L	28
C.	Solución de una ecuación diferencial homogénea , lineal y con coeficientes constantes	30
a.	La dimensión del núcleo de L	30
b.	Consideraciones sobre las soluciones <i>general</i> y <i>particular</i> de una ecuación homogénea . El caso de la solución de valores complejos	32
b.1.	Sobre las soluciones	32
b.1.1.	Sobre la solución <i>general</i>	33
b.1.2.	Sobre la solución <i>particular</i>	34
b.2.	Solución de valores complejos	35
c.	Método para conocer la solución <i>general</i> de una ecuación diferencial homogénea , lineal y con coeficientes constantes	36
c.1.	La ecuación característica	38
c.2.	Soluciones de la ecuación característica (<i>raíces</i>)	40
c.2.1.	Generalidades	40
c.2.1.1.	Métodos de solución de una ecuación polinomial	40
c.2.1.2.	Anotaciones sobre raíces complejas	40
c.2.2.	Las raíces	44
c.2.2.1.	Raíces reales	45
c.2.2.2.	Raíces complejas	46

D.	Solución de una ecuación diferencial no homogénea , lineal y con coeficientes constantes	pág. 48
a.	Método de coeficientes indeterminados	48
b.	Método de variación de parámetros	54
E.	Segunda nota sobre estabilidad. Ecuaciones con coeficientes constantes	58

CAPITULO IV. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

	ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN	59
A.	Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden	61
a.	Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes	62
a.1.	Algunas características comunes a los sistemas con coeficientes constantes y variables	62
a.2.	Sistema homogéneo de ecuaciones con coeficientes constantes	65
a.2.1.	Método 1 (sin diagonalizar A)	65
a.2.1.1.	Eigenvalores reales no repetidos	66
a.2.1.2.	Eigenvalores complejos no repetidos	66
a.2.	Método 2 (diagonalizando A)	68
b.	Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes	71
b.1.	Método 1 (matriz de coeficientes diagonalizable)	71
b.2.	Método 2 (matriz de coeficientes no diagonalizable)	72
B.	Estabilidad en sistemas autónomos lineales y no lineales	74

a. Diagramas de fase	pág. 77
a.1. Notas centrales	77
a.2. Notas adicionales	82
a.2.1. Sistema lineal autónomo de dos ecuaciones	82
a.2.2. Sistema lineal autónomo de n ecuaciones	83
b. Método directo de Liapounov	84

CAPITULO V. ECUACIONES DIFERENCIALES EN MODELOS DE MICROECONOMIA DINAMICA	91
a. Equilibrio y estabilidad dinámicos en un modelo de un mercado	90
a.1. Cuando las funciones de oferta y demanda agregada son lineales y dependen del precio	90
a.1.1. Definiciones y supuestos básicos	90
a.1.2. El equilibrio dinámico y su estabilidad	91
a.2. Dos casos adicionales	92
a.2.1. Ecuación diferencial $p' = k.E(p)$ para funciones de demanda y oferta no lineales	92
a.2.2. Una aplicación del método de Liapounov, cuando la función de demanda es no lineal	93
b. Equilibrio y estabilidad en un modelo de multimercado	94
b.1. Supuestos	94
b.2. El equilibrio dinámico y su estabilidad	97

CAPITULO VI. ECUACIONES DIFERENCIALES EN MODELOS

DE MACROECONOMIA DINAMICA

pág. 105

A. Relación entre inflación y desempleo en un modelo con expectativas adaptativas	105
a. Definiciones y supuestos básicos	105
b. Equilibrio y estabilidad del modelo	107
c. Observaciones a la política económica	109
B. Relación entre el mercado de bienes (*) y el mercado de dinero en un modelo con expectativas racionales y previsión perfecta	110
a. Supuestos	110
b. Equilibrio y estabilidad del modelo	111
c. Observaciones a la política económica	114
C. Un modelo dinámico con expectativas racionales para la inversión	116
a. Supuestos y definiciones	116
b. Equilibrio y estabilidad en el modelo	118
c. Efecto de una caída anticipada en la tasa de interés sobre la inversión	118
D. Un modelo macroeconómico para una economía pequeña, exportadora de petróleo y con cambio fijo	119
a. Definiciones y supuestos básicos	119
a.1. Identidades y funciones del modelo por sectores	119
a.1.1. Sector gasto	119

(*)

Título

correcto.

a.1.2. Sector externo	pág. 123
a.1.3. Sector producción	125
a.1.4. Sector monetario	127
a.2. El modelo estático	128
b. El modelo dinámico	131
b.1. Definición del modelo	131
b.2. Equilibrio y estabilidad	134
Anexo al CAPITULO VI. Notas sobre la tasa instantánea de crecimiento	138
Conclusiones	140
Bibliografía	142

Introducción.

Marshall definió la economía en sus Principios (1890) como "(...) un estudio de la Humanidad según ella vive, se mueve y piensa en los asuntos ordinarios de la vida; pero trata principalmente de aquellos *móviles* que afectan de un modo más intenso y constante a la conducta del hombre en la parte comercial de su vida." (*).

En esta definición, que incorpora la cualidad del *movimiento* para su objeto de estudio, está implícito el *tiempo*. No se propone un concepto para definirle, pero no se le descuida al proponer un *patrón de medida* para el objeto de estudio y al describir los distintos *métodos* que constituían la base de la moderna disciplina que, a su juicio, merecía contarse entre las que componían el conjunto de las ciencias.

Proponía para la economía un patrón *cuantitativo* con el cual medir la *fuerza* de los *móviles* de los hombres en actividad comercial: el dinero. Marshall reconocía que la medición de un *móvil* por medio del dinero era *indirecta*, que asignaba el mismo *valor* en términos cuantitativos a los *placeres* y *dolores* que distintas personas podían comprar o debían pagar a otras, al darles el valor de un chelín, y que estas personas seguramente los sentirían con distinta intensidad si se comparaban con otras en el mismo lugar, en otros lugares y consigo mismas en estados diferentes o momentos del *tiempo* distintos. Sin embargo, puesto que para facilitar el tratamiento *científico* de los problemas económicos era preciso disponer de un patrón de medida, se utilizaría

(*) Ver Marshall, 1948, pág. 14. Subrayado no de Marshall.

el dinero para medir indirectamente aquellos *móviles*, sin calificarlos moralmente, cuya acción fuera tan regular en el promedio de las personas de carne y hueso, en un lugar y tiempo determinados, que su comportamiento pudiera *predecirse* de modo que el cálculo de las *fuerzas motrices* que desata en la vida diaria pudiera comprobarse con lo ocurrido realmente.

Para saber cómo calcular dichas fuerzas, era necesario disponer de un *método* que permitiera descubrir las relaciones de causa y efecto que explican la interdependencia de los hechos económicos conocidos y por conocer, con la intención de formular *leyes económicas*, esto es, *manifestaciones generales de tendencias*, más o menos seguras, más o menos definidas, referidas a líneas de conducta que asumiría un cuerpo social en determinadas circunstancias, cuando la fuerza de los principales *móviles* pudiera medirse mediante un precio en dinero.

Un *método* particular no existía, pero podían utilizarse los diversos métodos existentes o su combinación cuando tal cosa resultara apropiada. Para ello, eran importantes dos consideraciones.

La primera, referida al objeto de estudio. Era necesario aceptar, contrariamente a lo supuesto por Ricardo, que los seres humanos no eran iguales entre sí ni consigo mismos, cuando se les comparaba en distintos países y tiempos, y mucho menos iguales al *hombre* supuesto por el economista.

La segunda, referida al tipo de razonamiento a aplicar para explicar el *pasado* y *predecir* el futuro. Marshall escribió que tales operaciones no son diferentes, sino una misma, efectuada en direcciones opuestas: la primera de efecto a causa, y la segunda

de causa a efecto. Si se lograra explicar *perfectamente* el pasado, bastaría una razonar de manera inversa para predecir *perfectamente* el futuro.

Sobre estas dos consideraciones se basaba la escogencia de los aspectos metodológicos pertinentes a elegir en otras disciplinas.

Para conocer las causas individuales e inferir *leyes*, se razonaba mediante *inducción*, realizada sobre hechos adecuadamente seleccionados y agrupados. Luego, relacionando distintas *leyes* obtenidas de igual manera, se conseguían *leyes* más generales utilizando la *deducción*. Para verificar la validez de estas *leyes*, se retornaba al proceso *inductivo*, que se iniciaba con la recopilación de nuevos hechos relevantes. Las cadenas de *deducciones* no debían ser muy largas, sino cortas y eslabonadas.

La selección e interpretación de los hechos era difícil, puesto que podían tomarse conjuntos incompletos de ellos y desconocerse relaciones de precedencia e importancia, y, sobre tales colecciones, podían proponerse *relaciones de causalidad* erróneas que condujeran a *deducciones* no explicativas del acontecimiento estudiado. Cuando esto ocurre estudiando el *pasado*, la historia permite detectar las conclusiones erradas, pero cuando ocurre *prediciendo* el futuro pueden causarse males.

La aceptación de las diferencias entre pobres y ricos, ciudadanos y campesinos, e ingleses y no ingleses, y los cambios en las costumbres e instituciones, señalados por los socialistas, provocaron cambios en la concepción de los problemas y en los métodos para estudiarlos. Ya no parecía conveniente el uso exclu-

sivo del método de la física, cuyos supuestos útiles eran la invariabilidad de la *materia* en el *tiempo* y el *espacio*, y la "facilidad" para aplicar razonamientos deductivos y lenguaje matemático.

El desarrollo de la biología permitió cambios de concepción, puesto que los biólogos postulaban que, considerando su crecimiento, la *materia orgánica* cumple diferentes etapas de desarrollo, por lo que las *leyes* de la ciencia no serán aplicables a cada una si son iguales. Cada conjunto de *leyes* debe corresponderse con cada una de las etapas del desarrollo.

Samuelson afirma (1953) que los intentos de Marshall por utilizar los conceptos de evolución y desarrollo biológico para incorporar el *tiempo* en el estudio del desenvolvimiento económico fueron decepcionantes, y que el uso del método de la física causa problemas al intentarse encontrar conceptos económicos correspondientes a los físicos (*). Por ello rechaza el uso de tales analogías y propone revisar directamente las teorías económicas que se ocupan del problema.

Para su tiempo, aparte de las teorías clásicas, y en ocasiones como su continuación o reexposición, se hallaban desarrollados conjuntos de teorías elaboradas mediante los análisis *estático* y *estático comparativo*. En ambos se postulaban la forma y estructura de las *leyes* que determinan el comportamiento de variables escogidas, interrelacionadas en *modelos*, esto es, sistemas lógicos propuestos como simplificaciones de la *realidad*. En ambos se partía del supuesto de existencia de un *equili-*

(*) Ver Samuelson, 1957, pág. 324.

brío para el modelo, es decir, de una situación tal que no existieran tendencias para su cambio. En el primero, se suponía constancia de las variables exógenas al modelo. En el segundo, se investigaban los efectos de variaciones en las variables exógenas, *comparando las situaciones de equilibrio antes y después del cambio, si el equilibrio se alcanzaba después del cambio*. Ambos análisis eran *atemporales*, porque no indicaban nada sobre la duración del proceso y ni sobre la *accesibilidad* del equilibrio, determinada tras considerar el *movimiento* de las variables del modelo durante el transcurso del tiempo.

Para Samuelson, esto fue sólo una tarea preliminar. Propuso una definición para *sistemas dinámicos* y una clasificación para tales sistemas. Además, enunció una relación explícita entre *estática comparativa* y *dinámica*, haciendo hincapié en el estudio de la *estabilidad dinámica* de los *equilibrios dinámicos*.

Samuelson escribe que "(...) un sistema es dinámico si su conducta en el tiempo está determinada por las ecuaciones funcionales en las cuales están involucradas en forma "esencial" las "variables en diferentes puntos del tiempo." (*). Para su estudio se hacen necesarias ecuaciones en diferencias finitas, ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales, funcionales más generales y tipos mixtos. Todas ellas resultado de la investigación de astrónomos, físicos y matemáticos de siglos pasados.

Clasifica los sistemas en seis grupos, considerando su relación con la definición previa:

1. Estático y estacionario: sistema estático donde la

(*) Ver Samuelson. 1957, pág. 326.

variable dependiente del tiempo permanece constante, o mantiene un comportamiento que se repite periódicamente en el tiempo.

2. Estático e histórico: sistema estático donde la variable dependiente del tiempo es exógena al modelo.

3. Dinámico y causal: sistema dinámico cuyo comportamiento depende sólo de las condiciones iniciales y del tiempo transcurrido.

4. Dinámico e histórico: sistema dinámico y causal incompleto: alguna de las variables dependientes del tiempo es exógena.

5. Estocástico y no histórico: sistema dinámico que considera la incertidumbre, cuyo comportamiento depende sólo de las condiciones iniciales, del tiempo transcurrido y de las características de variables aleatorias incorporadas, que varíen con el tiempo en forma "esencial".

4. Estocástico e histórico: sistema estocástico y causal incompleto: alguna de las variables dependientes del tiempo es exógena.

El trabajo de Samuelson, contenido en sus Fundamentos de Análisis Económico, es de una notable dificultad matemática. Sin embargo, su planteamiento de los problemas dinámicos parece justificar intentar comprender el método de las ideas expuestas en su libro.

En estas páginas se intenta adelantar un poco en el estudio de las herramientas básicas para comenzar la lectura de tales ideas. No se ha escogido la exposición de las ecuaciones en diferencias finitas, básicas en la obra de Samuelson y muy utilizadas en las teorías econométricas, por una preferencia personal

sobre la concepción continua del tiempo. Además, porque tal estudio puede hacerse posteriormente, aprovechando los resultados obtenidos en este trabajo sin las dificultades inherentes al cálculo.

Para comprender los puntos matemáticos tratados en este trabajo, se necesitan, además de conocimientos generales sobre cálculo, familiaridad con las llamadas funciones elementales: polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Todos los antecedentes necesarios pueden encontrarse en los libros mencionados en la bibliografía.

El tratamiento de las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, y de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden es superficial en estas páginas, puesto que su exposición requiere de conocimientos matemáticos superiores a los del autor. Sin embargo, debe resaltarse la importancia que Samuelson afirma tiene su estudio.

Los modelos que ilustran las aplicaciones económicas las ecuaciones diferenciales en este trabajo fueron seleccionados de los libros consultados, y expuestos casi de la misma manera como fueron leídos, intentando sólo aclarar los puntos más difíciles e integrándoles a lo expuesto en páginas anteriores. Estos modelos son del tipo dinámico y causal, según la clasificación de Samuelson.

Nada de cuanto pueda leerse aquí es original. Algunas de las ideas expuestas tienen más de trescientos años. Por ello, considero que el único mérito que podría tener este trabajo, si lo tuviera, sería el de una relativamente clara, completa y sintética exposición de los temas seleccionados.

CAPITULO I.

ECUACIONES DIFERENCIALES: ASPECTOS GENERALES.

a. Definición:

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que relaciona una *función desconocida* con al menos una de sus derivadas y otros datos (funciones conocidas, por ejemplo), y que se considera resuelta completamente cuando se determina de forma explícita la función desconocida. Si esta es una función de dos variables, y la variable independiente es el *tiempo*, la función desconocida describe la *trayectoria temporal* de la variable dependiente.

Cuando puede expresarse explícitamente la función desconocida, esta contiene uno o más coeficientes constantes "arbitrarios". Para determinar los valores de estas constantes es necesario disponer de información adicional a la ecuación. Esta información es llamada *condición inicial* o *condición de contorno*. Dependiendo de si se cuenta o no con dicha información, pueden distinguirse dos tipos de solución para cada ecuación diferencial, estrechamente relacionados.

Mientras no se definan los valores de las constantes, la función es una solución *general* de la ecuación diferencial, y constituye el conjunto de todas las soluciones posibles para la variable dependiente. Cuando se definen dichos valores, la función resultante, llamada solución *particular*, es una de todas las que pueden formarse a partir de la solución *general*.

Lograr una solución expresada como una función explícita es muy difícil en la mayoría de los casos. Sin embargo, es posible lograr información útil sobre muchas soluciones por medio de funciones implícitas (que no contengan derivadas de la función

desconocida), representaciones gráficas del comportamiento cualitativo de la función desconocida y aproximaciones de diversos tipos.

b. Clasificación y notación:

b.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias: si la función desconocida depende de una única variable, la ecuación contiene sólo derivadas ordinarias. Puede escribirse como:

$$G(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde t es la variable independiente y y es la función desconocida, cuya relación con t se nota por medio de $y = f(t)$. Las expresiones $y', \dots, y^{(n)}$ indican derivadas del primer orden al n -ésimo orden, con respecto a t , correspondientes a la función desconocida. Pueden escribirse también como $f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$.

En las páginas siguientes se supondrá siempre posible despejar $y^{(n)}$ de la ecuación, pudiendo escribirse esta como

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

La ecuación diferencial más sencilla es aquella donde el miembro de la derecha depende sólo de t , siendo la ecuación

$$y^{(n)} = F(t).$$

Una ecuación de esta forma se resuelve con n integraciones sucesivas, calculables generalmente por medio de funciones elementales. Debe resaltarse que, con cada integración, se incorpora una constante c a la expresión resultante. Así, al concluir las n integraciones, la expresión solución contendrá n constantes c_k ($k = 1, 2, \dots, n$), aditivas o multiplicativas. Si, dada una *condición inicial*, se obtienen valores para dichas constantes, se determina una *solución particular* de la ecuación. En caso contra-

rio, la solución será *general*. Esto será expuesto en detalle posteriormente.

b.1.1. Ecuaciones diferenciales lineales: si una ecuación diferencial

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

puede escribirse de la forma

$$P_0(t) \cdot y^{(n)} + P_1(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(t) \cdot y' + P_n(t) \cdot y = G(t)$$

se dice que es **lineal de n -ésimo orden u orden superior**, correspondiendo el orden de la ecuación al de la derivada de mayor orden en ella. Nótese que la función y y sus derivadas aparecen elevadas a la primera potencia, y que no hay productos de la forma $y \cdot y'$. Se supondrá en las siguientes páginas que $P_0, \dots, P_n$, y G son funciones continuas de valores reales sobre un intervalo I (*), y que P_0 nunca se anula en dicho intervalo. Dividiendo la ecuación preescrita entre $P_0(t)$, se obtiene

$$y^{(n)} + p_1(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t) \cdot y' + p_n(t) \cdot y = g(t).$$

Este tipo de ecuaciones puede clasificarse de cuatro maneras básicas, dependiendo de si las funciones p_k , llamadas coeficientes o parámetros de la ecuación diferencial, son constantes (**) o no, y de si la función g , llamada término de la ecuación diferencial, es idénticamente nula o no. Si g es idénticamente nula, la ecuación diferencial es llamada **homogénea**. En caso contrario, es llamada **no homogénea**. En una ecuación de este tipo el término

(*) El intervalo I puede ser $(-\infty, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , donde $a < b$. Si I es acotado, incluye sólo los últimos cuatro tipos.

(**) Cuando las funciones p_k sean constantes, se notarán como a_k para $k = 1, 2, \dots, n$.

g puede ser constante o no. Como se intentará exponer más adelante, lograr una solución de una ecuación no homogénea depende de la posibilidad de encontrar una solución para la correspondiente ecuación homogénea.

Un problema con ecuaciones diferenciales lineales de n -ésimo orden se dice que es de *valores iniciales* si se asignan valores a la función y y a todas sus derivadas de orden menor a n en el punto "inicial" t_0 , esto es, si se define una *condición inicial*. Su solución es llamada *particular*. En ecuaciones de este tipo puede demostrarse siempre que la solución *particular* existe, es única y puede expresarse explícitamente.

Si no se asignan los valores de la condición inicial, la solución de la ecuación es llamada *general*, porque contiene toda la familia de soluciones *particulares* posibles.

b.1.2. Ecuaciones diferenciales no lineales: toda ecuación diferencial ordinaria que no pueda escribirse como ecuación lineal es de este tipo. Estas ecuaciones pueden tener más de una solución *particular* para la misma condición inicial. Son más difíciles en todos los aspectos, por lo que los métodos indirectos, aproximativos y gráficos suelen ser más apreciados que las funciones, implícitas principalmente, que puedan obtenerse al tratar de resolverlas.

b.2. Ecuaciones diferenciales parciales: si la función desconocida depende de más de una variable, la ecuación contiene derivadas parciales, incluyéndose en esta categoría. En las próximas páginas no se encontrará ninguna referencia a los métodos desarrollados para determinar su solución.

c. Ecuaciones diferenciales, equilibrio y estabilidad.

En la teoría de las ecuaciones diferenciales, un conjunto (y_e, y_e') es denominado *punto crítico* o *punto de equilibrio* si $y_e' = 0$, esto es, si y_e constituye una *solución constante* de la ecuación diferencial, y, además, y_e'' es finita cuando $y_e' = 0$. En textos de economía matemática se llama al punto crítico *nivel de equilibrio intertemporal* o *equilibrio estacionario*.

Puede encontrarse una definición adicional en estos textos. Se dice que si $y_e' = g$, donde g es una constante, la función $y_e = g \cdot t$ es un *equilibrio móvil* o *en movimiento*. En lo sucesivo nos referiremos sólo a *puntos de equilibrio*, y no a *funciones de equilibrio*, a menos que lo indiquemos explícitamente.

Si existen soluciones del primer tipo, puede suponerse a la función y con el valor constante y_e permanentemente. Sin embargo, una perturbación puede alejar a la función del valor y_e . Ocurrido esto, la función puede tender a regresar al valor de equilibrio o separarse continuamente de él.

Se dice que un punto de equilibrio es *globalmente estable* si, luego de una perturbación, el valor de y tiende a retornar al de equilibrio desde cualquier punto no crítico del plano yy' , cuando t tiende a infinito. En el plano ty , los valores de la gráfica de cualquier *función solución* y que pueda determinarse *convergerán* al de y_e , cuando t tienda a infinito. Si sólo en la cercanía del punto de equilibrio puede afirmarse que y tiende a retornar a él, luego de una *pequeña perturbación*, cuando t tiende a infinito, se dice que dicho punto es *localmente estable*. Puesto que las ecuaciones lineales tienen un único punto de equilibrio, si es localmente estable, también lo es globalmente. No puede

afirmarse lo mismo sobre las ecuaciones no lineales, porque pueden tener más de un punto de equilibrio. Nótese que en ambos casos los valores de y tienden al valor del punto de equilibrio cuando t tiende a infinito. Por esta cualidad, se afirma que ambos tipos de puntos son *asintóticamente estables*.

Cuando la única gráfica de y que conduce a y_e , en el plano ty , comienza en y_e , mientras las demás se alejan de dicho valor, se dice que el punto de equilibrio es *inestable*.

No siempre existen puntos de equilibrio para una ecuación diferencial. Un caso ilustrativo es aquel cuya gráfica en el plano ty está dada por una función sinusoidal.

Cuando t es la variable tiempo, el análisis que conduce a determinar si un punto de equilibrio es estable o no es llamado *análisis de estabilidad dinámica para tiempo continuo*.

Antes de concluir este punto, es importante escribir unas palabras sobre los conceptos de *equilibrio y estabilidad estáticos*, cuya participación en los modelos económicos es fundamental.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$Q_D = Q_D(p),$$

$$Q_S = Q_S(p),$$

$$Q_D = Q_S,$$

donde las primeras son de *ecuaciones de comportamiento*, y la última una *condición de equilibrio*.

Este sistema constituye un *modelo estático* si ninguna de sus relaciones investiga la forma de los procesos que ocurren a través del tiempo. El equilibrio en un modelo de este tipo está dado por el par (p_e, Q_e) que satisface el sistema, donde las

fuerzas internas del modelo, descritas por las ecuaciones de comportamiento, se anulan. El análisis de estabilidad estática requiere del enunciado de una *condición de estabilidad*. No profundizaremos sobre este punto en este trabajo.

Si al sistema anterior se añade una ecuación diferencial de la forma

$$p' = F(t, p), \quad \text{donde} \quad p = p(t),$$

se introduce una relación *temporal* en el modelo, haciéndolo *dinámico*. Puesto que Q_d y Q_s dependen de p , y p de t , Q_d y Q_s dependen de t . En un modelo de este tipo no basta saber si el equilibrio estático existe, y si es estáticamente estable. Es deseable resolver la ecuación diferencial, determinar si tiene puntos de equilibrio, cuántos y cual es su tipo de estabilidad.

El análisis dinámico, por ser más general, contiene al análisis estático. Así, el equilibrio dinámico presupone el estático, y la estabilidad dinámica presupone la estática. Lo contrario, sin embargo, no siempre se cumple.

Según la teoría de las ecuaciones diferenciales, el valor constante y_e es el valor de equilibrio *dinámico* en cualquier instante del tiempo, considerado como variable, por lo que, en cualquier instante del tiempo, considerado como parámetro, el valor constante y_e es el valor de equilibrio *estático*.

Según la definición de *equilibrio móvil*, la función $y_e = g.t$ muestra un valor de equilibrio distinto para cada instante del tiempo, considerado como variable. Considerado como parámetro, en un instante del tiempo el valor de equilibrio *estático* es distinto al valor correspondiente a otro instante del tiempo.

Terminamos con la siguiente afirmación: la existencia de un valor de equilibrio estable en un modelo no implica que, necesariamente, todo valor pertinente definido en el modelo se encuentre directamente sobre el valor de equilibrio.

CAPITULO II.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

A. Ecuaciones lineales.

Las ecuaciones que se considerarán en este punto son de la forma

$$y' + p(t).y = g(t).$$

Siempre puede encontrarse una única solución *particular* para un problema de *valores iniciales* a partir de una solución *general* de la forma $y = f(t)$.

a. El caso más sencillo.

El caso más sencillo es aquel que nos permite plantear

$$y' = y$$

dado por $p(t) = -1$ y $g(t) = 0$.

Dividiendo ambos miembros entre la función y , e integrando posteriormente con respecto a t , obtenemos

$$\ln y + C = t.$$

Para despejar y de esta expresión, es preciso aplicar, a ambos miembros, la función inversa de $\ln y$, resultando

$$e^{\ln y + C} = e^t.$$

Resolviendo esta expresión, obtenemos

$$y = c.e^t, \quad \text{donde} \quad c = e^{-C}.$$

Dicho resultado era previsible, sabiendo, por estudios de cálculo, que la única función que es idéntica a su derivada es la función exponencial, y que, resolviéndose el problema tras una integración, debía incluirse una constante c en la solución.

En este punto conviene resaltar un aspecto básico de la

teoría. La función preescrita es una solución *general* del problema propuesto. Al asignarse un valor, llamado *valor inicial*, a la función $y = f(t)$ en un punto $t = t_0$, puede determinarse un valor único para la constante c , que define una solución *particular* a un problema de *valores iniciales*. El par $[t_0, f(t_0)]$ es denominado *condición inicial*. Mientras no se proponga una condición inicial, puede asignarse cualquier número real a c . Por ello se dice que puede conseguirse una familia de infinitas soluciones *particulares* a partir de una solución *general*. Sin embargo, puede demostrarse que una vez determinado el valor de c , la función *particular* es única.

Para demostrar que sólo una función, $y = f(t)$, satisface simultáneamente la ecuación diferencial $f'(t) = f(t)$ y la condición inicial $f(0) = b$, se procede como sigue:

Si la solución de la ecuación es de la forma $y = c.e^t$, y $f(t)$ una solución cualquiera, es lícito escribir $f(t) = c.e^t$, de donde

$$f(t).e^{-t} = c.$$

Se supondrá que

$$f(t).e^{-t} = h(t),$$

para demostrar que, si $y = f(t)$, $h(t)$ es una constante. Esto puede verificarse si $h'(t) = 0$:

$$h'(t) = e^{-t}.[f'(t) - f(t)] = e^{-t}.[0] = 0.$$

Nótese que el factor entre corchetes se anula en cumplimiento de la ecuación $f'(t) = f(t)$, planteada al comienzo de la demostración. Cuando $t = 0$, $e^{-t} = 1$ y $f(0) = h(0)$. Como $h(t)$ es una constante y $f(0) = b$, $h(t) = b$ para todo t , quedando demos-

trado que $f(t)$ es la única solución particular que satisface simultáneamente la ecuación diferencial y la condición inicial propuestas.

Por tanto, la expresión

$$f(t).e^{-t} = h(t).$$

puede escribirse como

$$f(t).e^{-t} = b \quad \text{o} \quad f(t) = b.e^t,$$

donde, como puede observarse por comparación, se asignó el valor b a la constante c . Dicha asignación corresponde sólo a un caso tal que $f(0) = b$ y define una única solución particular pertinente.

b. El caso más complejo.

Si, en lugar de considerar a $p(t) = -1$ y a $g(t) = 0$, consideramos a $p(t)$ y a $g(t)$ funciones no constantes, continuas en I , la ecuación diferencial se escribiría como

$$y' + p(t).y = g(t).$$

A cada ecuación de este tipo puede asociarse una ecuación de la forma

$$y' + p(t).y = 0,$$

donde $g(t)$ es idénticamente nula. Como se definió al comienzo, la primera ecuación es no homogénea y la segunda es homogénea. Siempre puede resolverse la primera si puede resolverse la segunda, razón por la cual obtendremos en primer lugar la solución general de la ecuación homogénea.

Siguiendo un procedimiento similar al expuesto para el caso sencillo, puede presentarse la solución general de la ecuación homogénea como una función de la forma

$$y = c \cdot e^{-A(t)},$$

donde $A(t) = \int p(s) ds$.

Para verificar si esta solución *general* es correcta, puede razonarse como en el caso sencillo:

Si la solución de la ecuación es de la forma $y = c \cdot e^{-A(t)}$, y $y = f(t)$ una solución cualquiera, es lícito escribir $f(t) = c \cdot e^{-A(t)}$, de donde

$$f(t) \cdot e^{A(t)} = c.$$

Se supondrá que

$$f(t) \cdot e^{A(t)} = h(t).$$

para demostrar que, si $y = f(t)$, $h(t)$ es una constante. Esto puede verificarse si $h'(t) = 0$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t) \cdot e^{A(t)} + f(t) \cdot e^{A(t)} \cdot A'(t) \\ &= e^{A(t)} \cdot [f'(t) + p(t) \cdot f(t)] \\ &= e^{A(t)} \cdot g(t). \end{aligned}$$

Puesto que $g(t) = 0$ para todo t en I , $h'(t) = 0$ y h es constante en I . Por ello, la solución *general* de la ecuación homogénea es tal como se ha escrito.

La solución *general* de la ecuación no homogénea puede encontrarse a partir del último resultado,

$$h'(t) = e^{A(t)} \cdot g(t).$$

Si se supone que $g(t) = f'(t) - p(t) \cdot f(t)$ no es idénticamente nula en I , $h(t)$ no es una función constante. Al integrar $h'(t)$, se obtiene

$$h(t) = c + \int e^{A(s)} \cdot g(s) ds$$

Sustituyendo $h(t)$ en

$$f(t) \cdot e^{A(t)} = h(t).$$

y despejando para la solución *general* $y = f(t)$ obtenemos

$$y = c \cdot e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \cdot \int g(s) \cdot e^{A(s)} ds,$$

solución *general* de la ecuación **no homogénea**.

El valor de la constante c determina, en ambos casos, la solución *particular* del problema de *valores iniciales*. Supongamos que $t_0 = a$. Este "valor inicial" determina el límite inferior de las integrales que se encuentran en ambas expresiones. Al evaluarlas en el punto a se anulan, pudiendo verificarse que

$$f(a) = c.$$

Asignar el valor b a la función f evaluada en el punto a equivale a sustituir la constante c en las soluciones *generales* descritas por el valor b . Esto hace única la solución, en cada caso, para el problema *particular*

$$f(a) = b.$$

Así, puede escribirse la solución *particular* para la ecuación **homogénea** como

$$f(t) = b \cdot e^{-A(t)}$$

y para la **no homogénea** como

$$f(t) = b \cdot e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \cdot \int_a^t g(s) \cdot e^{A(s)} ds$$

$$\text{donde } A(t) = \int_a^t p(s) d(s).$$

c. Primera nota sobre estabilidad. Dos casos con coeficientes constantes.

Sea el primer caso

$$y' + p \cdot y = g$$

donde p y g son constantes y diferentes de 0, y la variable t representa al tiempo. Si $y = f(t)$ recibe el valor b cuando $t = 0$, la solución particular de la ecuación, calculada a partir de la desarrollada para la ecuación no homogénea, toma la forma

$$f(t) = (b - g/p) \cdot e^{-p \cdot t} + g/p.$$

Puede notarse que, si $p > 0$, el primer término del miembro derecho tiende a 0 cuando t tiende a infinito, mientras el segundo término se mantiene constante. Dependiendo de si el signo de $(b - g/p)$ es positivo o negativo, el valor de $f(t)$ tiende a g/p por arriba o por abajo, cuando t tiende a infinito. Se dice que $f(t)$ converge hacia g/p , llamado *componente estacionaria de $f(t)$* o *nivel de equilibrio intertemporal*. El otro término es llamado *componente variable de $f(t)$* o *desviación del equilibrio*. El equilibrio alcanzado cuando t tiende a infinito es *dinámicamente estable*.

Sea el segundo caso

$$y' = g,$$

donde g es constante y $p = 0$. Si $y = f(t)$ recibe el valor b cuando $t = 0$, la solución particular de la ecuación, calculada por integración simple, es de la forma

$$f(t) = b + g \cdot t.$$

Esta ecuación define un *equilibrio en movimiento*.

B. Ecuaciones no lineales.

Las ecuaciones que se considerarán en este punto son de la forma

$$y' = f(t, y).$$

No siempre puede encontrarse una única solución *particular* para un problema de *valores iniciales*. A veces ni siquiera puede suponerse la existencia de una solución *general*. En la mayoría de los casos, no hay manera de determinar una solución explícita, pudiendo llegarse sólo hasta una expresión de la forma

$$\psi(t, y) = c.$$

De los métodos de solución, el más general es aplicable a las **ecuaciones diferenciales exactas**, que desarrollaremos a continuación.

Si una función de la forma preescrita es derivada con respecto a t , se obtendría la expresión

$$\psi_t(t, y) + \psi_y(t, y) \cdot y' = 0,$$

que, al ser integrada con respecto a t nos conduciría de nuevo a la función inicial.

Suponiendo que se dispone de una ecuación diferencial de la forma

$$M(t, y) + N(t, y) \cdot y' = 0,$$

y que $M_y(t, y) = N_t(t, y)$, donde M , N , M_y y N_t son continuas en una región R , simplemente conexa en el plano ty (esto es, limitada por una curva simple, continua y cerrada que no se cruce a sí misma), puede afirmarse que esta ecuación y la anterior son del mismo tipo.

Haciendo

$$\psi_t(t, y) = M(t, y), \quad \psi_y(t, y) = N(t, y)$$

y recordando el Teorema de Young puede comprenderse la afirmación anterior.

Integrando $\psi_t(t, y) = M(t, y)$ con respecto a t , se obtiene

$$\psi(t, y) = \int^t M(z, y) dz + h(y),$$

donde $h(y)$ es el término constante que resulta de toda integración indefinida. Se hace depender de y porque dicha variable se mantuvo constante durante la integración. Para disponer de la función implícita $\psi(t, y)$ tan sólo es necesario conocer la forma de $h(y)$. Esto se hará expresando su derivada en términos de las funciones conocidas tomadas de la ecuación.

Recordando que $\psi_y = N$, se procede a derivar la función anterior con respecto a y y a sustituir N por ψ_y , obteniéndose

$$N(t, y) = \int^t M_y(z, y) dz + h'(y),$$

de donde

$$h'(y) = N(t, y) - \int^t M_y(z, y) dz.$$

Al integrar $h'(y)$ con respecto a y se obtiene una función que sólo depende de y . Esto puede verificarse considerando que $h'(y)_t = N_t(t, y) - M_{yt}(t, y) = 0$. Integrando $h'(y)$ y sustituyendo en $\psi(t, y)$, se obtiene

$$\psi(t, y) = \int^t M_y(z, y) dz + \int^y [N(t, s) - \int^t M_y(z, s) dz] ds.$$

Como se indicó al comienzo, este método es el más general. Un caso particular es el de las ecuaciones diferenciales separables, que pueden escribirse de la forma

$$y' = P(t).Q(y).$$

Su solución es la más sencilla.

Otras ecuaciones pueden ser expresadas como exactas. Son aquellas que admiten el cambio de variables, como las ecuaciones diferenciales *homogeneas de grado 0*, o las que permiten determinar funciones $M(t,y)$, llamadas *factores integrantes*, tales que las funciones de la forma

$$M.[H(t, y)dt + N(t, y)dy] = 0$$

sean exactas.

Todos estos métodos pueden encontrarse en los libros sobre el tema consultados para este trabajo.

CAPITULO III.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR.

Como se indicó previamente, una ecuación diferencial de este tipo es de la forma

$$y^{(n)} + p_1(t).y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t).y' + p_n(t).y = g(t).$$

Para intentar comprender la justificación de los métodos de solución que se exponen en páginas siguientes, es necesario considerar aspectos del álgebra lineal que conducen a la teoría de los operadores lineales, puesto que, como se explicará posteriormente, el primer miembro de la ecuación puede escribirse como

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t).y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t).y' + p_n(t).y,$$

donde L es un operador lineal.

A. Conceptos básicos sobre espacios lineales, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales.

a. Espacios lineales o vectoriales generales.

Sean V un conjunto arbitrario y u, v y w tres de sus elementos. V es un *espacio lineal* si, para cualesquiera escalares k y l , reales o complejos, satisface los siguientes axiomas:

* Axiomas de clausura

1. Si u y v pertenecen a V , $(u + v)$ pertenece a V .
2. Si u pertenece a V , $k.u$ pertenece a V .

* Axiomas para la adición

3. $u + v = v + u$
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$
5. $u + 0 = u$ para todo u de V .
6. $u + (-1).u = 0$

* Axiomas para la multiplicación

$$7. k.(1.u) = (k,1).u$$

$$8. k.(u + v) = k.u + k.v$$

$$9. (k + 1).u = k.u + 1.u$$

$$10. 1.u = u \text{ para todo } u.$$

Los espacios lineales definidos de esta forma también se llaman *vectoriales generales*, o simplemente *vectoriales*, y sus elementos, *vectores*.

Todo subconjunto S , constituido por uno o más vectores del espacio vectorial V , es un *subespacio* de V si cumple los axiomas de clausura. Al "heredar" los restantes axiomas, la satisfacción de los axiomas de clausura define a S como un espacio vectorial contenido en V .

Algunos vectores de un espacio vectorial pueden expresarse en términos de otros. Si uno de aquellos elementos es v , y la relación que mantiene con los otros es del tipo

$$v = c_1.v_1 + c_2.v_2 \dots + c_r.v_r,$$

donde $c_1, \dots, c_r$ son escalares y $v_1, \dots, v_r$ son vectores, se dice que v es una *combinación lineal* de $v_1, \dots, v_r$. El conjunto de todos los vectores expresables como una combinación lineal de dichos elementos conforman un espacio vectorial *generado* por ellos.

De la observación de la expresión anterior, puede convenirse que el vector v *depende* de los r vectores del miembro de la derecha. Consideremos sólo dicho miembro, intentando expresar el vector v_1 en términos de los $r-1$ vectores restantes. Para ello, comenzamos haciendo al segundo miembro igual al vector 0:

$$c_1.v_1 + c_2.v_2 \dots + c_r.v_r = 0.$$

Para poder despejar v_1 en esta expresión es preciso que c_1 sea distinto de 0. Si alguno de los escalares de la expresión es diferente de 0, al menos uno de los vectores es combinación lineal de los otros, y se dice que el conjunto de r vectores es *linealmente dependiente*. En caso contrario, el conjunto es *linealmente independiente*.

Todo conjunto de r vectores linealmente independientes que generen a V se denomina *base* de V . Conocido el número de vectores de la base, se dice que el espacio V es de dimensión r .

Supongamos que la r -upla de vectores

$$(e_1, \dots, e_r),$$

forma una base ordenada en V . Si v pertenece a V puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de la base. Así,

$$v = c_1 \cdot e_1 + \dots + c_r \cdot e_r.$$

Los coeficientes de esta ecuación, unívocamente determinados por v , constituyen una r -upla de números $(c_1, \dots, c_r)$. Sus componentes son las *componentes de v respecto de la base ordenada $(e_1, \dots, e_r)$* .

b. Transformaciones lineales.

Toda función que asocia un vector único en W con cada vector en V es una función con valor vectorial de una variable vectorial. Una función F de este tipo puede notarse como

$$F : V \longrightarrow W.$$

Cada elemento v de V , dominio de F , tiene una imagen en W , representada como $F(v)$. El *recorrido* de F es $F(V)$, subespacio de W cuyos elementos son todas las imágenes de V a través de F .

Una función de este tipo es una *transformación lineal* si tiene las siguientes propiedades

* $T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todos los vectores u y v .

en V .

* $T(k.u) = k.T(u)$ para todos los vectores u en V y todos los escalares k .

Nótese que se utilizó la letra T en lugar de la letra F , para identificar la función como una transformación lineal. Extendiendo lo anterior a n elementos, se tiene

$$T(k_1.v_1 + \dots + k_n.v_n) = k_1.T(v_1) + \dots + k_n.T(v_n).$$

Si una transformación lineal de un espacio V se realiza sobre el mismo espacio, es decir, si $T : V \rightarrow V$, el signo T es un *operador lineal*.

Dos subespacios de W y V son particularmente necesarios para caracterizar una transformación lineal. Ellos son, respectivamente, el *recorrido*, ya mencionado, y el *núcleo* de T .

El núcleo, $N(T)$, es el conjunto de elementos de V cuya imagen a través de T es 0 . Esto puede escribirse como

$$N(T) = \{v \mid v \in V \text{ y } T(v) = 0\}.$$

El núcleo tiene siempre, al menos, un elemento. Si $v = 0$, $T(0) = 0$. Esto puede probarse utilizando $T(k.u) = k.T(u)$ y haciendo $k = 0$. El núcleo tiene sólo un elemento si $T(v) = 0$ implica que $v = 0$ para todo v de V . En este caso, el núcleo es igual al espacio vectorial cero, es decir, $N(T) = \{0\}$, cuya dimensión es, por definición, 0 .

Existe una relación importante entre las dimensiones de V , $N(T)$ y $T(V)$. Tal puede expresarse como

$$\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V.$$

Para demostrarla, supongamos conocidas las dimensiones de V

y de su subespacio $N(T)$. Recordemos que todos los vectores linealmente independientes de un subespacio son un subconjunto del espacio original, generado a su vez por un conjunto de vectores linealmente independientes. Esto significa que cada base del subespacio es un subconjunto de una base del espacio. Por tanto, suponiendo $\dim V = n$ y $\dim N(T) = k$, debe cumplirse que $n \geq k$.

Cualquier vector v de V puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de su base. Según lo expuesto, esto puede escribirse como

$$v = c_1 \cdot v_1 + \dots + c_k \cdot v_k + c_{k+1} \cdot v_{k+1} + \dots + c_n \cdot v_n,$$

donde los primeros k vectores son la base de $N(T)$.

Al aplicarse T a v , y utilizando la extensión de las propiedades de la transformación lineal, se obtiene

$$\begin{aligned} T(v) &= c_1 \cdot T(v_1) + \dots + c_k \cdot T(v_k) + c_{k+1} \cdot T(v_{k+1}) \\ &\quad + \dots + c_n \cdot T(v_n). \end{aligned}$$

Los primeros k términos del segundo miembro se anulan, por ser imágenes de elementos del núcleo. Por tanto, $T(v)$ es generado por los $n-k$ vectores restantes. Siendo linealmente independientes, estos vectores constituyen una base para el espacio $T(V)$, llamado recorrido. Por tanto, es un espacio de dimensión $n-k$, demostrándose lo que quería demostrarse.

Por lo expuesto, se concluye directamente que,

$$\text{si } \dim N(T) = 0, \text{ entonces } \dim V = \dim T(V).$$

Esto ocurre, como se ha mencionado, sólo si $T(v) = 0$ implica que $v = 0$ para todo v de V . Una función con esta característica es una transformación no singular. De todas las propiedades de este tipo de transformaciones, una es particularmente relevante para este estudio. Si una transformación es no singular, también

es uno a uno en V . Esto significa que $T(v) = T(u)$ implica que $v = u$ para todo v y u de V .

Para demostrarlo, supongamos que la transformación es no singular, y que, dados v y u de V , se cumple

$$T(v) = T(u).$$

Por la linealidad de la transformación,

$$T(v - u) = T(v) - T(u),$$

que implica

$$T(v - u) = 0.$$

Por el supuesto de no singularidad, debe cumplirse

$$v - u = 0,$$

demostrándose que la transformación debe ser uno a uno. El recíproco también se cumple, pero se omite la demostración.

c. Sistemas de ecuaciones lineales.

Es sabido que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede escribirse en términos matriciales de la siguiente forma

$$A.x = c,$$

donde A es la matriz $m \times n$ de coeficientes (números), x es el vector $n \times 1$ de incógnitas y c es el vector $m \times 1$ de términos constantes (números).

Este sistema puede representarse por medio de transformaciones lineales. A determina una transformación del espacio V^n al espacio V^m , es decir, aplica el vector arbitrario x , de V^n , en y , de V^m . Esto puede escribirse como

$$T(x) = y, \quad \text{donde} \quad T(x) = A.x.$$

El sistema matricial, expresado como transformación lineal,

se escribiría

$$T(x) = c.$$

El sistema no tendrá solución, es decir, será inconsistente, si c no se encuentra en $T(V^n)$. Si un sólo x se aplica en c , la solución es única. En el tercer caso, el sistema admite más de una solución.

A todo sistema

$$A.x = c,$$

puede asociarse el sistema

$$A.x = 0,$$

haciendo $c = 0$. El primero es un sistema **no homogéneo**, y el segundo, un sistema **homogéneo**. Luego de representar el sistema como una transformación lineal, puede convenirse que el conjunto de soluciones del sistema **homogéneo** es el núcleo de T , $N(T)$, y que, por lo expuesto en la sección anterior, por lo menos cuenta con la solución $x = 0$, llamada *trivial*.

La solución de un sistema **no homogéneo** está relacionada con la solución de su sistema **homogéneo** asociado. Si b (conocida) y u (desconocida) son soluciones del sistema **no homogéneo**, el vector $v = u - b$ es una solución del sistema **homogéneo** asociado. Esta solución debe ser *general*, porque no está referida a un caso específico entre todos los posibles. Nótese que la matriz A de coeficientes puede ser un arreglo de cualquier conjunto de números.

La expresión de los sistemas como transformaciones lineales permite probar esta afirmación. Aplicando las propiedades de la transformación lineal a $T(v)$, se verifica

$$\begin{aligned} T(v) &= T(u - b) \\ &= T(u) - T(b). \end{aligned}$$

Puesto que b es una solución del sistema **no homogéneo**, $T(b) = c$. u también lo es, por lo que $T(u) = c$. Nótese que, al ocurrir esto, $T(v) = 0$. Esto permite afirmar que, para hallar todas las soluciones de un sistema **no homogéneo**, es preciso hallar todas las de un sistema **homogéneo** y una solución *particular* del **no homogéneo**, esto es,

$$u = v + b.$$

Todo vector v puede expresarse como combinación lineal de los k vectores de la base de $N(T)$, esto es

$$v = c_1 \cdot v_1 + \dots + c_k \cdot v_k,$$

donde las constantes son arbitrarias. Dicha combinación es la solución *general* del sistema **homogéneo**.

La combinación lineal

$$u = b + c_1 \cdot v_1 + \dots + c_k \cdot v_k$$

es la solución *general* del sistema **no homogéneo**.

Obsérvese que estos resultados, que nos señala los componentes de cada solución, no indican los medios de conseguirlos.

B. La ecuación diferencial lineal de n -ésimo orden expresada por medio de un operador lineal, L .

Sabiendo que $y = f(x)$, considérese la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + p_1(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t) \cdot y' + p_n(t) \cdot y = q(t).$$

Identifiquemos el primer miembro como la función $L[y]$, que se aplica a la función y , pertenecientes ambas al conjunto de todas las funciones diferenciables n veces en un intervalo I . Esto conduce a la expresión

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t) \cdot y' + p_n(t) \cdot y.$$

Supongamos que se eligen dos funciones, y_1 y y_2 , del conjunto mencionado. Es posible demostrar que se cumple

$$L[c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2] = c_1 \cdot L[y_1] + c_2 \cdot L[y_2].$$

Demostraremos esta proposición, por brevedad, sólo para

$$L[y] = y'' + p \cdot y' + q \cdot y,$$

donde $p = p_1$ y $q = p_2$.

$$\begin{aligned} L[c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2] &= (c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2)'' + p \cdot (c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2)' + \\ &\quad q \cdot (c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2) \\ &= c_1 \cdot (y_1'' + p \cdot y_1' + q \cdot y_1) + c_2 \cdot (y_2'' + p \cdot y_2' + q \cdot y_2) \\ &= c_1 \cdot L[y_1] + c_2 \cdot L[y_2]. \end{aligned}$$

Por lo que se ha presentado hasta ahora, puede intuirse que L es un operador lineal. Siendo $L[y]$ función de una función desconocida y y sus derivadas, L es llamado *operador diferencial lineal de orden n* . Este operador se utiliza en ecuaciones de orden mayor o igual a dos.

a. Uso de la notación vectorial.

La mayor dificultad que se encuentra para asociar esta afirmación con los conceptos de la sección A. de este capítulo es consecuencia de la distinta notación que se utiliza en cada oportunidad. Aunque en secciones posteriores se usará la notación presentada en líneas anteriores, por ser la expuesta en los libros consultados, en esta se intentará adoptar la notación de A. para lograr resultados importantes.

Así,

* $C^n(I)$ es el espacio vectorial compuesto por todas las

funciones y derivables n veces en I . Este espacio es de dimensión infinita, por lo que no puede encontrarse una base finita que lo genere.

* La función y , por ser elemento de un espacio vectorial, es un vector, y puede expresarse como combinación lineal de otros vectores (funciones $y_1, y_2, \dots, y_r$).

* La función L aplica el vector $L(y)$, del espacio $C^n(I)$, al vector y , del espacio $C^n(I)$. Por tanto, es de la forma

$$L : C^n(I) \rightarrow C^n(I),$$

identificándose L como un operador lineal si cumple con

$$L(c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2) = c_1 \cdot L(y_1) + c_2 \cdot L(y_2).$$

La demostración expuesta anteriormente confirma que L es un operador lineal, por lo que se tiene

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t) \cdot y' + p_n(t) \cdot y.$$

En términos matriciales, el operador sería

$$L(y) = [y^{(n)} : y^{(n-1)} : \dots : y' : y] \cdot p(t),$$

donde $p(t)$ es el vector columna cuyas componentes son las funciones $1, p_1(t), \dots, p_n(t)$. Escrito de esta forma, se hace evidente que el vector $L(y)$ es un vector columna, pero no puede determinarse el número de sus componentes. Considerando que la dimensión de $C^n(I)$, dominio de L , es infinita, y que por ello no hay una base finita para $C^n(I)$, puede suponerse que tampoco la habrá para el recorrido de L en $C^n(I)$. Si no existe dicha base, tampoco existe un conjunto finito de componentes de $L(y)$.

Sin embargo, puede demostrarse, como intentaremos hacerlo, que el núcleo de L , $N(L)$, es un subespacio de $C^n(I)$ con dimensión n .

b. Importancia del núcleo de L .

Recordemos que $N(L)$ puede definirse como el conjunto

$$N(L) = \{y : y \in V \text{ y } L(y) = 0\}.$$

Cuando se exige que la imagen de y a través de L sea el vector 0 se plantea como problema resolver una ecuación diferencial **homogénea** de n -ésimo orden, esto es, si

$$L(y) = 0,$$

entonces

$$y^{(n)} + p_1(t).y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t).y' + p_n(t).y = 0.$$

Cada uno de los elementos del vector 0 debe leerse como una función constante que asigna el valor 0 a todo t en I .

c. Relación entre ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas de n -ésimo orden.

En el apartado c. de la sección A. de este capítulo, sobre sistemas de ecuaciones lineales, se demostró la relación entre las soluciones *generales* de los sistemas **no homogéneo** y su asociado **homogéneo**. Una demostración similar, utilizando el operador L , permite encontrar una relación entre las soluciones *generales* de las ecuaciones diferenciales **no homogénea** y su asociada **homogénea**.

Si se desea conocer el conjunto de funciones y cuya imagen a través de L es g , se plantea un problema sobre una ecuación **no homogénea**. Supongamos que y y y_p son dos soluciones de este problema, *general* (desconocida) la primera y *particular* (conocida) la segunda, de modo que

$$L(y) = g \qquad \text{y} \qquad L(y_p) = g.$$

Aplicando las propiedades de las transformaciones lineales, se puede verificar que

$$L(y) - L(y_p) = 0.$$

$$L(y - y_p) = 0.$$

Este resultado implica que $(y - y_p)$ es una solución de la ecuación **homogénea**. No habiéndose especificado ninguna condición inicial, dicha solución debe ser *general*. Tradicionalmente se identifica con y_c , aunque no en notación vectorial.

En base a lo anterior puede afirmarse, como para los sistemas de ecuaciones lineales, que, si se conocen la solución *general* de la ecuación **homogénea**, y_c , y una solución *particular* de la ecuación **no homogénea**, y_p , por ejemplo, puede conocerse la solución *general* de la ecuación **no homogénea**, y . Podemos expresar esta relación mediante

$$y = y_c + y_p.$$

La relación demostrada no indica cómo calcular y_c ni y_p , ni cuál será la forma de cada una. Sin embargo, señala la necesidad de disponer de ambas.

Aun si conocer la forma de la función y_p , podemos mencionar una útil aplicación de la propiedad de linealidad sobre ella. Supongamos que la función g puede expresarse como la suma finita

$$g = g_1 + \dots + g_m.$$

Si es posible encontrar una solución *particular* para cada

$$L(y) = g_k, \quad \text{donde} \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

entonces, por sustitución directa,

$$y_p = y_{p1} + \dots + y_{pm},$$

por lo que puede escribirse

$$y = y_c + y_{p1} + \dots + y_{pm}.$$

Resolver problemas por este método, llamado **método de superposición**, puede ser más sencillo en ocasiones.

C. Solución de una ecuación diferencial homogénea, lineal y con coeficientes constantes.

Si se asume como problema conocer y_c , el paso inicial es determinar la dimensión del espacio $N(L)$, que contiene todas las soluciones de la ecuación homogénea. Conocida su dimensión, se sabrá cuantos vectores (funciones) linealmente independientes se necesitan para generar completamente $N(L)$, llamado *espacio solución*. Teniéndoles, podrá expresarse la solución general de la ecuación homogénea, y_c , como una combinación lineal de ellos.

a. La dimensión del núcleo de L .

Para determinar la dimensión de $N(L)$ se sigue un procedimiento indirecto. Para abordarlo, es conveniente hacer una precisión previa. Como se recordará, por estudios de cálculo, n derivaciones sobre una función causan una "pérdida" de n constantes, c_k ($k = 1, 2, \dots, n$), a dicha función. Al retornar a ella, es preciso restituirlas. Mientras no se asignen valores a esas constantes, la función será, como ya se ha señalado en repetidas ocasiones, una solución general, familia de soluciones particulares. Para conocer una solución particular, esto es, una función $y = f(t)$ que en el punto t_0 asuma el valor $f(t_0) = k_0$, donde k_0 es una constante escogida, es preciso descubrir valores para las n constantes c_k que aseguren dicho resultado.

Visto de esta manera, los valores de c_k son n incógnitas. Para hallar sus valores, que pueden ser números reales o complejos, se requieren n condiciones. Las condiciones propuestas por

los matemáticos fueron, además de asignar k_0 a $f(t_0)$, hacer $k_1 = f'(t_0)$, ..., $k_{n-1} = f^{(n-1)}(t_0)$. Algo más con respecto a esto se expondrá en el sub-apartado b.1.2. de esta sección.

Sobre estas y otras consideraciones, los matemáticos lograron demostrar que existe sólo una función que pueda satisfacer simultáneamente una ecuación diferencial **homogénea** y un conjunto de condiciones iniciales. Este resultado es conocido como **teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales homogéneas de n -ésimo orden**. Probarlo supera, lamentablemente, el alcance de este trabajo. Como es necesario para demostrar que la dimensión de $N(L)$ es n , lo aceptamos sin prueba.

Antes de proseguir, debemos identificar los vectores que utilizaremos en la demostración.

Puesto que todo elemento del espacio $N(L)$ es una función que puede expresarse a partir de la solución *general* del sistema **homogéneo**, toda función del espacio $N(L)$ se identificará como y_c . Este vector es una combinación lineal de las funciones linealmente independientes que generan a $N(L)$, cuya dimensión se intenta determinar.

Llamaremos *vector-valor inicial* al vector k , un elemento tomado de V^n , espacio n -dimensional de las n -uplas de escalares. El vector k tiene por componentes los escalares $k_0, \dots, k_{n-1}$, asignados a la función y_c y a sus derivadas de orden menor que n , cuando $t = t_0$.

Sea T la transformación lineal que aplica cada función y_c de $N(L)$ en k de V^n . En términos de vectores, esta transformación puede escribirse como $T(y_c) = k$. En términos de espacios, como $T : N(L) \rightarrow V^n$. $N(L)$ es el dominio de T , y $T[N(L)]$ su

recorrido. Puesto que k es tomado de un espacio n -dimensional, y todo $T(y_c)$ debe ser igual a k para resolver el problema, podemos afirmar que $T[N(L)]$ también es un espacio n -dimensional.

Por el teorema de existencia y unicidad, se sabe que la imagen de y_c a través de T es igual a k sólo una vez, siendo T una transformación uno a uno en $N(L)$. Como se anotó en páginas anteriores, T también debe ser no singular: si $k = 0$, $T(y_c) = 0$ se satisfará sólo si $y_c = 0$. En consecuencia, el núcleo de T es igual al espacio vectorial cero, y su dimensión es 0. Si $\dim N(T) = 0$, entonces $\dim N(L) = \dim T[N(L)]$, donde $T[N(L)]$ es el recorrido de T .

Como $\dim T[N(L)] = n$, $\dim N(L) = n$, que es lo que queríamos demostrar.

b. Consideraciones sobre las soluciones *general* y *particular* de una ecuación homogénea. El caso de la solución de valores complejos.

b.1. Sobre las soluciones.

Si suponemos que las funciones p_k , $k = 1, 2, \dots, n$, son funciones constantes en I , y que $y^{(n)}$ tiene por coeficiente la constante a_0 , el operador

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t) \cdot y' + p_n(t) \cdot y.$$

puede escribirse como

$$L(y) = a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y.$$

Aunque las características de las soluciones *general* y *particular* que ocupan esta sección son comunes a ambos operadores, por ser ambos lineales, los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales que implican son diferentes.

En estas páginas sólo se presentarán anotaciones sobre ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Los métodos de solución de las ecuaciones con coeficiente variables involucran el uso de series infinitas, lo que está fuera del alcance de este trabajo.

b.1.1. Sobre la solución *general*.

El resultado del apartado anterior, conocido como **teorema de dimensionalidad**, es muy importante. Significa que cualquier vector y_c del *espacio solución* de una ecuación **homogénea** puede expresarse como combinación de los n vectores linealmente independientes que forman su base. Estos vectores, que llamaremos $y_1, y_2, \dots, y_n$, constituyen un *conjunto fundamental de soluciones* de la ecuación **homogénea**. Como explicaremos enseguida, todas son soluciones de

$$L(y) = 0,$$

donde

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y.$$

La combinación lineal

$$y_c = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n \cdot y_n,$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias, es el vector representativo de todos los vectores del *espacio solución* y, por lo tanto, la solución *general* de $L(y) = 0$.

En cumplimiento de la propiedad de linealidad, cada función $y_1, y_2, \dots, y_n$ debe ser solución de $L(y) = 0$, como puede comprenderse de lo siguiente.

Si

$$L(c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n \cdot y_n) = 0,$$

entonces

$$c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) + \dots + c_n L(y_n) = 0.$$

Como las constantes c_k , $k = 1, 2, \dots, n$ son arbitrarias, ambas ecuaciones serán satisfechas sólo si cada función de y_c también es solución de $L(y) = 0$.

b.1.2. Sobre la solución particular.

Aunque no conocemos la forma de las funciones $y_1, \dots, y_n$, sabemos que todas pueden derivarse n veces con respecto a t . Si determináramos un vector-valor inicial k , y evaluáramos cada función y cada una de sus derivadas de orden menor a n en el punto $t = t_0$, podríamos escribir un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} c_1 \cdot y_1(t_0) + \dots + c_n \cdot y_n(t_0) &= k_0 \\ c_1 \cdot y_1'(t_0) + \dots + c_n \cdot y_n'(t_0) &= k_1 \\ c_1 \cdot y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n \cdot y_n^{(n-1)}(t_0) &= k_{(n-1)}. \end{aligned}$$

Este sistema corresponde a una solución particular en el punto $t = t_0$. Para que, partiendo de los valores dados para las funciones, se puedan cumplir las condiciones iniciales dadas en k , es preciso que los valores de $c_1, \dots, c_n$ se adapten. Como se había mencionado antes, en un problema de valores iniciales las constantes $c_1, \dots, c_n$ son las incógnitas.

Podemos escribir el sistema anterior en notación matricial.

Sea

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

donde $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ es una matriz $n \times n$ llamada *Wronskiana*. Si las funciones de la matriz son evaluadas en $t = t_0$, la matriz se escribe $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t_0)$. Para abreviar, llamaremos a la matriz *Wronskiana* en $t = t_0$ sólo por $W(t_0)$.

Utilizando esta matriz, podemos escribir el sistema anterior como sigue

$$W(t_0) \cdot c = k,$$

donde c es el vector de incógnitas. Para que este sistema tenga solución, es necesario que $W(t_0)$ tenga inversa. Por estudios de álgebra lineal, se sabe que esto ocurrirá sólo si su determinante, llamado *Wronskiano* de $y_1, y_2, \dots, y_n$ en $t = t_0$, es distinto de 0. Es útil saber que, si el *Wronskiano* se anula en un punto dentro de I , se anula idénticamente en I . Aunque la demostración de esta proposición, conocida como **teorema de Abel**, es relativamente sencilla, no la presentaremos en estas páginas.

La consecuencia más importante de la representación matricial discutida proviene del valor del *Wronskiano*. Si este determinante es distinto de 0, los vectores de su matriz son linealmente independientes. Por tanto, multiplicando la primera fila de la matriz por c , se obtiene

$$c_1 \cdot y_1(t_0) + \dots + c_n \cdot y_n(t_0).$$

Puesto que puede escogerse cualquier t_0 en I , se tiene

$$y_c = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n \cdot y_n,$$

la solución *general* de la ecuación **homogénea**.

b.2. Solución de valores complejos.

Sea $y = u(t) + i \cdot w(t)$ una solución de valores complejos de la ecuación

$$L(y) = 0,$$

donde

$$L(y) = y'' + p(t).y' + q(t).y.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(u + i.w) &= (u + i.w)'' + p.(u + i.w)' + q.(u + i.w) \\ &= (u'' + p.u' + q.u) + i.(w'' + p.w' + q.w) \\ &= L(u) + i.L(w) = 0. \end{aligned}$$

Esto se cumple si y sólo si $L(u) = 0$ y $L(w) = 0$, por lo que u y w también son soluciones de $L(y) = 0$.

Si u y w son linealmente independientes, la solución *general* de la ecuación podría escribirse como una función de valores reales

$$y_c = c_1.u + c_2.w.$$

Recuérdese que el número imaginario i es constante, y que cada constante c_k ($k = 1, 2$) puede asumir cualquier valor, sea real o imaginario.

En el sub-apartado c.2.1.2. de la próxima sección se encontrarán referencias básicas sobre los números complejos.

c. Método para conocer la solución *general* de una ecuación diferencial homogénea, lineal y con coeficientes constantes.

Hasta ahora, sólo se sabe que la solución *general* debe estar compuesta por n funciones linealmente independientes, pero no se sabe cómo encontrar cada una. El objetivo de esta sección es plantear un método para hallar las que corresponden a una ecuación donde

$$L[y] = 0,$$

donde

$$L[y] = a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y.$$

Como es evidente, se ha abandonado la notación vectorial. Los autores consultados no se valen de dicha notación, pero era útil en este trabajo usarla para dar claridad a las proposiciones presentadas en la sección B. de este capítulo, desarrolladas en base a la teoría de las transformaciones lineales. No siendo necesario recurrir a esta teoría para demostrar las próximas relaciones, podemos retornar a la notación de los libros. La semejanza de los caracteres es obvia, y los conceptos no cambian, por lo que no debería existir confusión debida a esto.

Antes de exponer cómo hallar la solución *general* de la ecuación

$$a_0 \cdot y^{(n)} + \dots + a_r \cdot y^{(n-r)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0,$$

supongamos que los coeficientes $a_{r+1}, \dots, a_n$ son todos nulos, siendo la ecuación

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_r \cdot y^{(n-r)} = 0.$$

Si integramos ambos miembros $m = (n - r)$ veces con respecto a t , obtendremos la ecuación

$$a_0 \cdot y^{(r)} + a_1 \cdot y^{(r-1)} + \dots + a_r \cdot y \\ + c_1 \cdot t^{m-1} + c_2 \cdot t^{m-2} + \dots + c_{(m-1)} \cdot t + c_m = 0.$$

Resaltemos que el primer renglón es ocupado por una expresión con la forma del miembro izquierdo de una ecuación diferencial de r -ésimo orden, cuya solución *general* nos interesa en este apartado. El segundo renglón es ocupado por un polinomio de grado $m-1$, cuyos coeficientes son $m = (n - r)$ constantes resultantes de las $m = (n - r)$ integraciones realizadas.

Como se expuso en el sub-apartado b.1.1. de la sección C., en este capítulo, la solución *general* de una ecuación diferencial

de n -ésimo orden debe ser la combinación lineal de n funciones linealmente independientes, tales que cada una sea solución de la ecuación $L(y) = 0$.

Puede probarse, por simple sustitución en la ecuación

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_r \cdot y^{(n-r)} = 0,$$

que cada término del polinomio

$$p_{m-1} = c_1 \cdot t^{m-1} + c_2 \cdot t^{m-2} + \dots + c_{(m-1)} \cdot t + c_m$$

es una solución de $L[y] = 0$. Además, como puede encontrarse en libros de álgebra lineal, el conjunto $S = \{1, t, t^2, \dots, t^{m-1}\}$ es una base de P_{m-1} , con lo que son linealmente independientes.

Notemos que siempre que la función desconocida y no aparezca en la ecuación podemos integrarla directamente. Por este medio, logramos determinar $m = (n - r)$ soluciones al problema planteado. Las r soluciones que nos faltan provendrán de la ecuación

$$a_0 \cdot y^{(r)} + a_1 \cdot y^{(r-1)} + \dots + a_r \cdot y = 0.$$

A este tipo de ecuaciones nos dedicaremos enseguida.

c.1. La ecuación característica.

Pretendemos resolver

$$L[y] = 0,$$

donde

$$L[y] = a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y.$$

Podemos describir lo que queremos con palabras. Deseamos conocer una función tal, que si la sumásemos cierto número de veces (a_n), más cierto número de veces (a_k , $k = 1, \dots, n-1$) cada una de sus derivadas (con respecto a t) con orden menor o igual a n , obtuviéramos como resultado la función 0.

Una función muy apropiada para probar es la función expo-

nencial

$$y = e^{r \cdot t},$$

donde r es una constante, porque, antes de comenzar, se sabe que cada una de sus k derivadas ($k = 1, \dots, n$) consistirá de la función y y un término constante multiplicativo (r^k). Esto permite, si los términos de la ecuación son constantes, tomar la función como factor común y formar un polinomio con el resto de la ecuación.

Nótese que, de tener éxito, al proponer previamente la forma de la función y sustituir sus derivadas en la ecuación diferencial se evita un engorroso proceso de integración, quizás irrealizable.

Sustituyendo, derivando y tomando factor común $e^{r \cdot t}$ en nuestra ecuación, obtenemos

$$a_0 \cdot (e^{r \cdot t})^{(n)} + a_1 \cdot (e^{r \cdot t})^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot (e^{r \cdot t})' + a_n \cdot e^{r \cdot t} = 0,$$
$$e^{r \cdot t} \cdot (a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n) = 0,$$

Si hacemos

$$Z(r) = a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n,$$

podemos escribir la ecuación diferencial

$$L[y] = 0,$$

como

$$e^{r \cdot t} \cdot Z(r) = 0.$$

Puesto que $e^{r \cdot t}$ nunca se anula, $L[y]$ sólo será igual a la función 0 si

$$Z(r) = 0.$$

Al igualarse $Z(r)$, llamado *polinomio característico*, con 0, se determina una ecuación polinomial, llamada *ecuación característica* de la ecuación diferencial.

En base al teorema de la factorización completa, puede escribirse

$$Z(r) = a_0 \cdot (r - r_1) \cdot (r - r_2) \cdot \dots \cdot (r - r_n),$$

donde $r_1, \dots, r_n$, números reales o complejos, no necesariamente distintos, son los *ceros* de $Z(r)$, esto es, los números que le anulan. Si un cero se repite s veces, se dice que es un *cero de multiplicidad s* .

La *ecuación característica* tendrá, por tanto, n soluciones, o *raíces*, no necesariamente distintas, reales o complejas.

c.2. Soluciones de la ecuación característica (*raíces*).

c.2.1. Generalidades.

c.2.1.1. Métodos de solución de una ecuación polinomial.

Descubrir las soluciones de una ecuación polinomial de grado mayor a tres puede ser muy difícil. Por estudios de álgebra elemental pueden conocerse dos métodos: el basado en el **teorema de la solución racional** y el de las *aproximaciones sucesivas*, conocido como de Newton. Este es el más sencillo del conjunto de métodos agrupados bajo el nombre de *métodos numéricos*. En estas páginas no nos detendremos en exponerlos.

c.2.1.2. Anotaciones sobre raíces complejas.

Para facilitar la lectura continua de los próximos puntos, nos conviene hacer aquí una breve digresión, que recolecte algunos de los conceptos y relaciones que precisaremos al referirnos a las raíces complejas de la ecuación característica. Puesto que en este sub-apartado no se hace ninguna referencia a las ecuaciones diferenciales, quien conozca las relaciones que permiten escribir un número complejo en sus formas cartesianas,

polar y exponencial puede omitir su lectura. Aquí no se pretende definir los números complejos como pares de números reales con propiedades especiales, ni probar las afirmaciones que se copiarán en seguida, puesto que nos separaríamos demasiado de nuestro objetivo.

Sabemos que los números complejos pueden escribirse como

$$u = a + i.b,$$

donde a y b son reales e i es imaginario ($i = \sqrt{-1}$). Cada uno de estos números tiene asociado un número complejo, $\bar{u}$, llamado *conjugado*, tal que

$$\bar{u} = a - i.b.$$

Los conjugados tienen tres propiedades importantes:

$$* \overline{u_1 + u_2 + \dots + u_n} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_n.$$

$$* \overline{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n} = \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 \cdot \dots \cdot \bar{u}_n.$$

$$* \overline{u^n} = (\bar{u})^n.$$

Estas propiedades, junto con el hecho de saber que todo número real es igual a su conjugado, permiten demostrar que si u es una raíz de

$$a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n = 0,$$

donde a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) son reales, su conjugado también lo es. Si los coeficientes de un polinomio son números complejos, las raíces serán complejas, pero no conjugadas.

Los números complejos pueden representarse en un plano cartesiano si se elabora un sistema de coordenadas tal, que a se refiera al eje de abscisas (*real*) y b al de ordenadas (*imaginario*). Este diagrama (Gráfica III. 1.), llamado de Argand, nos permite expresar los números complejos en términos de las

funciones $\text{sen } \theta$ y $\cos \theta$. Así,

$$a = R \cdot \cos \theta \quad \text{y} \quad b = R \cdot \text{sen } \theta,$$

donde, θ es el ángulo formado por la rotación de un rayo de longitud R alrededor de $(0,0)$, su extremo, desde el eje real hasta el punto (a,b) . Determinando a y b los catetos adyacente y opuesto de un triángulo rectángulo, R , la hipotenusa, se define como $\sqrt{a^2 + b^2}$. Por ello, puede escribirse

$$a + i \cdot b = R \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta).$$

La expresión anotada indica la identidad de las llamadas formas cartesiana y polar de un número complejo.

Estos números pueden expresarse de una tercera forma, conocida como exponencial, que implica

$$R \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) = R \cdot e^{i \cdot \theta}.$$

Para demostrar esta afirmación, llamada *relación de Euler*, es preciso comenzar por transformar las funciones e^{θ} , $\cos \theta$ y $\text{sen } \theta$ en polinomios tales, que los coeficientes de sus variables sean funciones de todas sus derivadas, comenzando desde la primera. Sustituyendo cada función por su polinomio correspondiente, verificaríamos que la relación se cumple para todo. Esta demostración no se incluye porque nos obligaría a definir las series de Taylor y Maclaurin, y las derivadas de las funciones mencionadas.

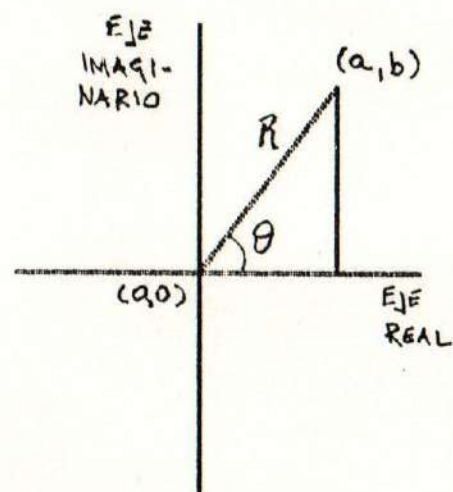
Por lo tanto, aceptaremos que son equivalentes

$$a + i \cdot b = R \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) = R \cdot e^{i \cdot \theta}.$$

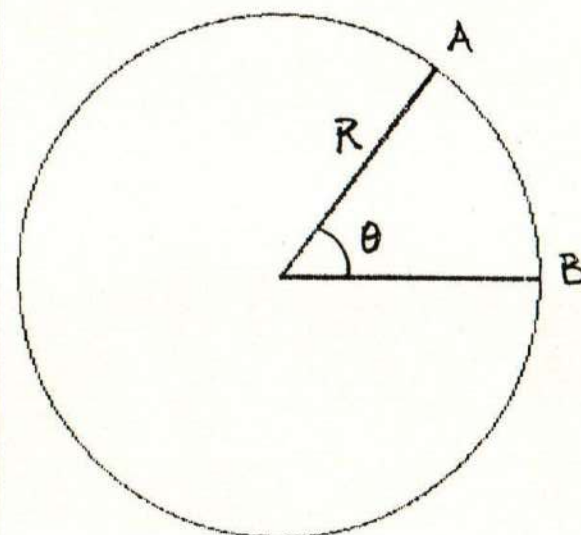
Las expresiones para el conjugado son

$$a - i \cdot b = R \cdot (\cos \theta - i \cdot \text{sen } \theta) = R \cdot e^{-i \cdot \theta}.$$

Tomando las formas polar y exponencial de ambos casos, puede elaborarse el siguiente sistema de ecuaciones



GRAFICA III. 1.



GRAFICA III. 2.

$$\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta = e^{i \cdot \theta}$$

$$\cos \theta - i \cdot \operatorname{sen} \theta = e^{-i \cdot \theta}.$$

Despejando las funciones trigonométricas, se tiene

$$\cos \theta = (e^{i \cdot \theta} + e^{-i \cdot \theta})/2$$

$$\operatorname{sen} \theta = (e^{i \cdot \theta} - e^{-i \cdot \theta})/(2 \cdot i).$$

Antes de considerar las representaciones polar y cartesiana del caso general, $e^{(h+i \cdot v) \cdot t}$, justifiquemos el siguiente cambio de variable:

$$\theta = v \cdot t,$$

donde v es un número real constante y t es la variable. La legitimidad de este cambio proviene de la definición de *radián*, una unidad de medida del ángulo θ .

Inscribamos el triángulo tomado del diagrama de Argand en un círculo con centro en $(0,0)$ y radio R (Gráfica III. 2.). Si el arco AB , limitado sobre la circunferencia por el eje real y el punto (a,b) , es de longitud igual a R , se dice que el ángulo mide un *radián*. La medida de un ángulo en términos de radianes se escribe como

$$\theta = (\text{arco } AB)/R.$$

Si $R = 1$, $\theta = (\text{arco } AB)$, de donde puede afirmarse que, mientras el ángulo θ se haga mayor (rotación contra las agujas del reloj), el arco se hará mayor en la misma cantidad. Si $R = 1$, los valores del ángulo y el arco estarán relacionados, directamente, por un coeficiente de proporcionalidad constante, $1/R$.

Haciendo $v = 1/R$ y $t = (\text{arco } AB)$, se obtiene

$$\theta = v \cdot t.$$

Evaluaremos a continuación las formas polar y cartesiana que

corresponden al caso general $e^{(h+i.v).t}$. Sabemos que

$$e^{(h+i.v).t} = e^{h.t} \cdot e^{i.v.t}.$$

Por la relación de Euler, podemos escribir

$$e^{i.v.t} = \cos v.t + i.\operatorname{sen} v.t.$$

Podemos observar que, en este caso, $R = 1$. Por tanto,

$$a = \cos v.t \quad \text{y} \quad b = \operatorname{sen} v.t.$$

Haciendo uso de una notación más cómoda, escribimos

$$a + i.b = \cos vt + i.\operatorname{sen} vt.$$

Lo anterior nos conduce a

$$\begin{aligned} e^{(h+i.v).t} &= e^{h.t} \cdot e^{i.v.t}, \\ &= e^{h.t} \cdot (\cos vt + i.\operatorname{sen} vt), \\ &= e^{h.t} \cdot (a + i.b). \end{aligned}$$

El lector puede conseguir las expresiones que corresponden a $e^{(h-i.v).t}$.

c.2.2. Las raíces.

Una vez conocidas las n raíces, $r_1, \dots, r_n$, la primera proposición sobre la forma de la solución *general* de la ecuación **homogénea** de n -ésimo orden es

$$y_c = c_1 \cdot e^{r_1.t} + c_2 \cdot e^{r_2.t} + \dots + c_n \cdot e^{r_n.t}.$$

Recordemos que la solución *general*, que continuaremos denominando y_c , es una combinación lineal de n funciones linealmente independientes, con n componentes arbitrarias. Por tanto, es obligatorio verificar tal independencia, cosa que siempre puede hacerse con el *Wronskiano*.

Como se dijo al comienzo, una ecuación característica puede tener simultáneamente raíces reales y complejas, y puede tenerlas repetidas. Cuando esto ocurre, cada clase de raíz se trata por separado, presentándose la solución general como la combinación

lineal del conjunto de funciones que se obtengan de cada tipo de tratamiento.

c.2.2.1. Raíces reales.

Si las raíces son reales y diferentes, las funciones siempre serán linealmente independientes.

Si hay una raíz real, r_1 , de multiplicidad s , se pierden $s-1$ funciones en la solución propuesta. Esto puede comprobarse tomando factor común $e^{r_1 \cdot t}$ en y_c , y agrupando las s constantes en c .

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + \dots + c_s \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_{s+1} \cdot e^{ru \cdot t} \dots + c_n \cdot e^{rn \cdot t}, \\ &= C \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_{s+1} \cdot e^{ru \cdot t} + \dots + c_n \cdot e^{rn \cdot t}, \end{aligned}$$

donde $u = s + 1$ y $C = c_1 + \dots + c_s$.

Esta combinación lineal no nos sirve, puesto que se dispone sólo de $n-s+1$ funciones linealmente independientes.

Para una ecuación de segundo orden puede probarse que la combinación apropiada es

$$y_c = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{r_1 \cdot t}.$$

La solución $t \cdot e^{r_1 \cdot t}$ fue determinada a partir de $e^{r_1 \cdot t}$, utilizando el **método de reducción de orden**, que, por brevedad, no se ha expuesto en este trabajo (*). Las funciones $e^{r_1 \cdot t}$ y $t \cdot e^{r_1 \cdot t}$ son linealmente independientes.

Si una ecuación característica para una ecuación de n -ésimo orden tiene una raíz de multiplicidad s , pueden utilizarse las s funciones siguientes en y_c :

$$e^{r_1 \cdot t}, \quad t \cdot e^{r_1 \cdot t}, \quad t^2 \cdot e^{r_1 \cdot t}, \quad \dots, \quad t^{s-1} \cdot e^{r_1 \cdot t}.$$

Además de poderse probar su independencia lineal, puede probarse que anulan $LL[y]$.

(*) Ver Boyce y DiPrima, 1984, págs. 133-135 y 140-141.

Recordemos. Si

$$L[y] = a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y,$$

y hacemos $y = e^{r \cdot t}$, entonces

$$L[e^{r \cdot t}] = e^{r \cdot t} \cdot a_0 \cdot (r - r_1) \cdot (r - r_2) \cdot \dots \cdot (r - r_n).$$

Suponiendo que r_1 es un cero de multiplicidad s , el polinomio podría escribirse

$$L[e^{r \cdot t}] = e^{r \cdot t} \cdot a_0 \cdot (r - r_1)^s \cdot (r - r_{s+1}) \cdot \dots \cdot (r - r_n),$$

o

$$L[e^{r \cdot t}] = e^{r \cdot t} \cdot (r - r_1)^s \cdot H(r),$$

Para obtener la expresión de $L[y]$ cuando $y = t \cdot e^{r \cdot t}$, nos basta tomar la primera derivada, con respecto a r , a ambos miembros de la expresión anterior. De aquí,

$$L[t \cdot e^{r \cdot t}] = e^{r \cdot t} \cdot [t \cdot (r - r_1)^s \cdot H(r) + s \cdot (r - r_1)^{s-1} \cdot H(r) + (r - r_1)^s \cdot H'(r)].$$

Puesto que este polinomio se anula cuando $r = r_1$, la ecuación $L[y] = 0$ es satisfecha cuando $y = t \cdot e^{r \cdot t}$.

Las siguientes $s-1$ derivadas de $L[e^{r \cdot t}]$, que dan origen a las funciones $t^2 \cdot e^{r_1 \cdot t}$, ..., $t^{s-1} \cdot e^{r_1 \cdot t}$, también se anulan cuando $r = r_1$. Por lo tanto, estas funciones pueden formar parte del conjunto de funciones linealmente independientes que definen a y_c .

c.2.2.2. Raíces complejas.

Como se expuso en el sub-apartado c.2.1.2., si un número complejo es raíz de una ecuación polinómica con coeficientes constantes, su conjugado también lo es.

Supongamos, que las raíces para la ecuación característica de una ecuación diferencial de segundo orden son

$$r_1 = h + i.v \quad \text{y} \quad r_2 = h - i.v,$$

por lo que podemos escribir la solución general como

$$y_c = c_1 \cdot e^{(h+i.v).t} + c_2 \cdot e^{(h-i.v).t}.$$

Siguiendo las relaciones delineadas en el sub-apartado c.2.1.2, y aplicando un poco de álgebra, pueden comprenderse las próximas líneas

$$\begin{aligned} y_c &= e^{h.t} (c_1 \cdot e^{i.v.t} + c_2 \cdot e^{-i.v.t}) \\ &= e^{h.t} [c_1 \cdot (\cos vt + i \cdot \operatorname{sen} vt) + c_2 \cdot (\cos vt - i \cdot \operatorname{sen} vt)] \\ &= e^{h.t} [(c_1 + c_2) \cdot \cos vt + i \cdot (c_1 - c_2) \cdot \operatorname{sen} vt]. \end{aligned}$$

En el sub-apartado b.2. se demostró que

$$L[u + i.v] = L[u] + i.L[w] = 0.$$

Además, se afirmó que si u y v son funciones lineales, y_c puede escribirse como su combinación lineal. Siendo

$$u = e^{h.t} \cdot \cos vt \quad \text{y} \quad w = e^{h.t} \cdot \operatorname{sen} vt,$$

la solución general puede escribirse como una solución de valores reales, de la forma

$$y_c = e^{h.t} \cdot (k_1 \cdot \cos vt + k_2 \cdot \operatorname{sen} vt),$$

donde

$$k_1 = c_1 + c_2 \quad \text{y} \quad k_2 = (c_1 - c_2) \cdot i.$$

En una ecuación diferencial de n -ésimo orden, de cada pareja de raíces compleja y conjugada, puede conseguirse una pareja de funciones, seno y coseno, de variable real.

Si la raíz $r_1 = h + i.v$ se repite s veces, su conjugado, $r_2 = r_1$, se repetirá también s veces. Por tanto, estas $2.s$ raíces deben conducir a $2.s$ soluciones linealmente independientes.

Esto puede lograrse utilizando el recurso que permitió resolver el problema causado por las s raíces reales repetidas.

Se multiplica cada par de soluciones

$$u = e^{h \cdot t} \cdot \cos vt \quad \text{y} \quad w = e^{h \cdot t} \cdot \sen vt,$$

por t^k , donde $k = 0, 1, \dots, s-1$. Las funciones obtenidas son $2s$ soluciones linealmente independientes de la ecuación $L(y) = 0$.

D. Solución de una ecuación diferencial no homogénea, lineal y con coeficientes constantes.

Como se demostró en el apartado c. de la sección B., en este capítulo, si se conocen la solución *general* de la ecuación homogénea asociada, y_c y una solución *particular* de la no homogénea, y_p , se define su solución *general*, y , por medio de

$$y = y_c + y_p.$$

Disponemos ya de un método para conocer y_c . Para conocer y_p , aun cuando existen varios métodos, aquí sólo evaluaremos el **método de coeficientes indeterminados** y el **método de variación de parámetros**.

a. Método de coeficientes indeterminados.

Supongamos que, siguiendo algún criterio, proponemos la forma de una función, y_p , que pretendemos sea una solución *particular* de la ecuación **no homogénea**

$$L[y] = g(t),$$

donde

$$L[y] = a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y.$$

La función y_p será una solución sólo si su imagen a través de L es igual a la función $g(t)$. Para que tal igualdad se cumpla, puede ser preciso que **algo** se adapte en y_p a la regla impuesta por L . En los tres tipos de casos que consideraremos, observaremos que dicho **algo** son los coeficientes de la función propuesta.

Para determinar la forma correcta de y_p es pertinente considerar la forma de la función $g(t)$. Supondremos que puede ser de una de las tres formas siguientes, o una combinación de ellas:

$$g(t) = \begin{cases} p_n(t) = b_0 \cdot t^n + b_1 \cdot t^{n-1} + \dots + b_n \\ e^{w \cdot t} \cdot p_n(t) \\ e^{w \cdot t} \cdot p_n(t) \cdot \text{sen } zt \quad \text{ o } \quad e^{w \cdot t} \cdot p_n(t) \cdot \text{cos } zt. \end{cases}$$

Adivinar en cualquier otro caso es, generalmente, muy difícil.

* Caso 1.

Sea

$$L[y] = g(t),$$

donde

$$g(t) = b_0 \cdot t^n + b_1 \cdot t^{n-1} + \dots + b_r \cdot t^{n-r} + \dots + b_{n-1} \cdot t + b_n.$$

Suponemos que los coeficientes en $L[y]$ desde a_n , hasta a_{r+1} son distintos de 0.

Puesto que $g(t)$ es un polinomio de grado n , puede proponerse como solución particular un polinomio de grado n :

$$y_p = A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \dots + A_n.$$

Supongamos que aplicamos L a y_p , e igualamos su imagen y $g(t)$.

$$a_0 \cdot (y_p)^{(n)} + a_1 \cdot (y_p)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot (y_p)' + a_n \cdot (y_p) = b_0 \cdot t^n + b_1 \cdot t^{n-1} + \dots + b_{n-1} \cdot t + b_n.$$

Si resolviéramos la sencilla, pero extensa cantidad de derivaciones indicadas por L , todos los términos de $L[y_p]$ quedarían expresados como potencias de t con coeficientes variables. Tomaremos un sólo término para aclarar lo anterior.

Observemos que el único término en $L[y_p]$ que contiene al factor t^n es $a_n \cdot y_p$, puesto que es el único donde el polinomio y_p no es derivado. Separemos de $a_n \cdot y_p$ el término $a_n \cdot A_0 \cdot t^n$, e igualemosle con su correspondiente en $g(t)$:

$$a_n \cdot A_0 \cdot t^n = b_0 \cdot t^n.$$

Siendo a_n y b_0 coeficientes de $L[y]$ y de $g(t)$, la igualdad anterior se cumplirá sólo si se adapta A_0 .

Realizadas las n derivaciones indicadas, y tomando factor común cada término t^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, se puede construir, añadiendo el resultado anterior, un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas, siendo estas los coeficientes de y_p , A_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Conocidos estos, queda determinada una solución particular de la ecuación no homogénea, cuando $g(t)$ es un polinomio de grado n y suponemos que los coeficientes en $L[y]$ desde a_n , hasta a_{r+1} son distintos de 0.

Como fue presentado al comienzo del apartado c., de la sección anterior, cuando suponemos que los coeficientes desde a_n hasta a_{r+1} son nulos, cada término de un polinomio, de grado $m-1$ [$m = (n-r)$] y con coeficientes arbitrarios, es una solución de la ecuación homogénea. Como consecuencia, no podemos utilizar estos m términos, que se encuentran en la primera forma propuesta para la solución particular de la ecuación no homogénea.

Para proponer una nueva forma, observemos nuevamente la relación

$$a_n \cdot A_0 \cdot t^n = b_0 \cdot t^n.$$

Sabemos que el único término en la forma propuesta que contiene al factor t^n es el escrito en el miembro izquierdo de la expresión. Si $a_n = 0$, tal igualdad es imposible. La consecuencia

de esta observación suministra la clave para proponer una nueva forma para y_p .

Si el único término que contiene a t^n se anula, la primera forma de y_p se "reduce" a un polinomio de grado $n-1$, y no es posible establecer un sistema con solución única para el conjunto de incógnitas $(A_k, k = 0, 1, \dots, n)$. Para que y_p sea un polinomio de grado n , basta con multiplicar la forma original por t .

Si los $m = (n - r)$ últimos coeficientes de $L[y]$ son nulos, por extensión del argumento anterior, la nueva forma para y_p sería

$$y_p = t^m \cdot (A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \dots + A_n).$$

* Caso 2.

Sea

$$L[y] = g(t),$$

donde

$$g(t) = e^{w \cdot t} \cdot p_n(t).$$

Suponemos que los coeficientes en $L[y]$ desde a_n , hasta a_{r+1} son distintos de 0.

Un medio de resolver un problema es expresándolo en términos de otro problema con solución conocida. Para resolver este, que se diferencia del anterior sólo por la inclusión de la función exponencial $e^{w \cdot t}$, donde w es una constante real, se buscó la manera de expresarlo durante el proceso sólo como polinomio, para aprovechar la solución del caso 1.

Se sabe que

$$[e^{w \cdot t}]^{(k)} = w^k \cdot e^{w \cdot t}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo tanto, siempre que forme parte, como factor, de y_p ,

podrá tomarse $e^{w \cdot t}$ como factor común al resolver

$$L[\gamma] = a_0 \cdot \gamma^{(n)} + a_1 \cdot \gamma^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot \gamma' + a_n \cdot \gamma.$$

Los coeficientes w^k son constantes diferentes, por lo que no salen como factor común.

Teniendo esto en cuenta, proponemos la forma

$$\gamma_p(t) = e^{w \cdot t} \cdot u(t)$$

como la correspondiente a la solución particular de nuestro problema, siendo $u(t)$ una función por definir.

Al tomar las n derivadas de γ_p , obtenemos

$$\gamma_p'(t) = e^{w \cdot t} \cdot [u'(t) + w \cdot u(t)]$$

$$\vdots$$

$$\gamma_p^{(n)}(t) = e^{w \cdot t} \cdot [u^{(n)}(t) + \dots].$$

Sustituyendo estas derivadas en

$$L[\gamma_p] = a_0 \cdot [\gamma_p]^{(n)} + a_1 \cdot [\gamma_p]^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot [\gamma_p]' + a_n \cdot [\gamma_p],$$

logramos una expresión donde $e^{w \cdot t}$ puede tomarse como factor común a todos los términos. Al hacerse

$$L(\gamma_p) = e^{w \cdot t} \cdot p_n(t),$$

se puede, como consecuencia, retirar $e^{w \cdot t}$ de ambos miembros de la igualdad. El miembro derecho se reduce a un polinomio de grado n , y el izquierdo, compuesto sólo por la función u , sus n derivadas con respecto a t y constantes multiplicativas, al miembro izquierdo de una ecuación diferencial lineal de n -ésimo orden con coeficientes constantes. En conjunto, conforman una ecuación no homogénea como las presentadas en el caso 1.

Sabemos que una solución particular para este caso es dada por

$$u_p = A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \dots + A_n.$$

Para el caso 2, la solución sería

$$y_p(t) = e^{w \cdot t} \cdot (A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \dots + A_n).$$

Si, como en el caso 1, los $m = (n - r)$ últimos coeficientes de $L[y]$ son nulos, la nueva forma para y_p sería

$$y_p(t) = t^m (A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \dots + A_n) \cdot e^{w \cdot t}.$$

* Caso 3.

Sea

$$L[y] = g(t),$$

donde

$$g(t) = e^{w \cdot t} \cdot P_n(t) \cdot \text{sen } zt.$$

o

$$g(t) = e^{w \cdot t} \cdot P_n(t) \cdot \text{cos } zt.$$

Puesto que ambas formas de $g(t)$ conducen al mismo resultado, tras un proceso similar, desarrollaremos sólo el correspondiente a la primera forma.

Sabemos, por lo expuesto previamente, que podemos escribir

$$\text{sen } zt = (e^{i \cdot z \cdot t} - e^{-i \cdot z \cdot t}) / (2 \cdot i).$$

Esto nos permite expresar el término $g(t)$ del primer problema de forma parecida a dos términos $g(t)$ del caso 2, esto es, funciones exponenciales multiplicando polinomios

$$g(t) = e^{(w+i \cdot z) \cdot t} \cdot [P_n(t) / (2 \cdot i)] - e^{(w-i \cdot z) \cdot t} \cdot [P_n(t) / (2 \cdot i)].$$

La particularidad en este caso es la inclusión de números imaginarios. A pesar de ello, a cada sumando de $g(t)$ puede proponerse una función similar a la solución particular del caso 2. La función exponencial siempre podrá tomarse como factor común de y_p , aunque sea de exponente complejo, y el número imaginario $2 \cdot i$, siendo constante, puede incluirse en los coeficientes de los

polinomios de y_p , de modo que puede escribirse

$$y_p = e^{(w+i.z).t} \cdot (A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \dots + A_n) \\ - e^{(w-i.z).t} \cdot (B_0 \cdot t^n + B_1 \cdot t^{n-1} + \dots + B_n).$$

Como en esta expresión subsisten números complejos en forma exponencial, conviene expresarlos en forma polar, con intención de transformar la solución particular anterior en una función de valores reales, como se hizo en el sub-apartado c.2.2.2. de la sección anterior.

Por lo visto en el sub-apartado c.2.1.2., escribimos

$$y_p = e^{w \cdot t} \cdot [(\cos zt + i \cdot \operatorname{sen} zt) \cdot (A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \dots + A_n) \\ - (\cos zt - i \cdot \operatorname{sen} zt) \cdot (B_0 \cdot t^n + B_1 \cdot t^{n-1} + \dots + B_n)].$$

Asociando términos, podemos escribir

$$y_p = e^{w \cdot t} \cdot [(C_0 \cdot t^n + C_1 \cdot t^{n-1} + \dots + C_n) \cdot \cos zt \\ + (D_0 \cdot t^n + D_1 \cdot t^{n-1} + \dots + D_n) \cdot \operatorname{sen} zt],$$

donde

$$C_k = A_k - B_k \quad \text{y} \quad D_k = (A_k + B_k) \cdot i, \\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

b. Método de variación de parámetros.

Supongamos que disponemos de la solución general, y_c , de la ecuación homogénea, asociada a la ecuación no homogénea que deseamos resolver, y que dicha solución es la combinación lineal

$$y_c = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n \cdot y_n.$$

Postulamos que podemos hallar una solución particular, y_p , de la ecuación no homogénea, a partir de la combinación anterior, sustituyendo sus coeficientes por funciones $u_1(t)$, ..., $u_n(t)$ que debemos determinar. A esto se llama hallar la solución por variación de parámetros, método aplicable para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes o variables.

Escribimos

$$y_p = u_1(t) \cdot y_1 + u_2(t) \cdot y_2 + \dots + u_n(t) \cdot y_n.$$

Puesto que las n funciones $u_k(t)$ son incógnitas, necesitamos de n condiciones que determinen un sistema consistente de ecuaciones. La primera de ellas, obviamente indispensable, es que con y_p sea satisfecha

$$L[y_p] = g(t).$$

Si esta condición se satisface, no importa la forma de las funciones u_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Las $n-1$ condiciones faltantes pueden escogerse de manera que las derivadas $y_p', \dots, y_p^{(n)}$, necesarias para definir $L[y_p]$, tomen formas lo más sencillas que sea posible. Una manera de hacerlo es imponiendo restricciones que impidan la aparición de derivadas para las u_k de orden superior al primero en $y_p', \dots, y_p^{(n)}$.

La primera derivada de y_p con respecto a t es, por las reglas de la suma y el producto,

$$\begin{aligned} y_p' &= (u_1 \cdot y_1' + u_2 \cdot y_2' + \dots + u_n \cdot y_n') \\ &\quad + (u_1' \cdot y_1 + u_2' \cdot y_2 + \dots + u_n' \cdot y_n). \end{aligned}$$

La segunda derivada de y_p con respecto a t será más sencilla si imponemos arbitrariamente la anulación del segundo renglón de la expresión anterior:

$$u_1' \cdot y_1 + u_2' \cdot y_2 + \dots + u_n' \cdot y_n = 0.$$

Al tomar la segunda derivada de y_p con respecto a t (la primera de y_p') tras hacer efectiva la condición impuesta, tendremos

$$\begin{aligned} y_p'' &= (u_1 \cdot y_1'' + u_2 \cdot y_2'' + \dots + u_n \cdot y_n'') \\ &\quad + (u_1' \cdot y_1' + u_2' \cdot y_2' + \dots + u_n' \cdot y_n'). \end{aligned}$$

Para facilitar la obtención de la tercera derivada de y_p con respecto a t podemos imponer arbitrariamente una tercera condición, haciendo

$$u'_1 \cdot y_1' + u'_2 \cdot y_2' + \dots + u'_n \cdot y_n' = 0.$$

Tenemos una condición referida al cumplimiento de $L(y_p) = g(t)$, y dos establecidas para simplificar las derivadas primera y segunda de y_p , haciéndoles contener sólo derivadas de primer orden para u_k . Nos faltan $n-3$ condiciones, que podemos imponer de manera que las siguientes $n-3$ derivadas de y_p también contengan sólo derivadas de primer orden para u_k .

Así, para tener

$$y_p^{(m)} = (u_1 \cdot y_1^{(m)} + u_2 \cdot y_2^{(m)} + \dots + u_n \cdot y_n^{(m)}),$$

impondremos

$$u'_1 \cdot y_1^{(m-1)} + u'_2 \cdot y_2^{(m-1)} + \dots + u'_n \cdot y_n^{(m-1)} = 0,$$

donde $m = 3, 4, \dots, n-1$.

Disponemos ya de las n condiciones, pero nos falta expresar la primera, $L[y_p] = g(t)$, en términos compatibles con las restantes $n-1$ ecuaciones. Para ello sólo nos falta conocer la forma de $y_p^{(n)}$ y sustituir las $n-1$ derivadas que hemos definido previamente, y la función y_p que postulamos al comienzo, en $L[y_p]$.

La n -ésima derivada de y_p es

$$y_p^{(n)} = (u_1 \cdot y_1^{(n)} + \dots + u_n \cdot y_n^{(n)}) + (u'_1 \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + u'_n \cdot y_n^{(n-1)}).$$

Hallando $L[y_p]$ e igualando el resultado a $g(t)$, se obtiene

$$u'_1 \cdot y^{(n-1)}_1 + \dots + u'_n \cdot y^{(n-1)}_n = g(t),$$

porque todas las funciones $u(t)_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, aparecen multiplicadas por $L[y_k]$, que, como sabemos, son nulas (y_k son soluciones de la ecuación homogénea asociada).

En base a las n condiciones presentadas, puede escribirse el siguiente sistema de n ecuaciones con n incógnitas, donde las incógnitas son las n derivadas u_k' ,

$$u'_1 \cdot \gamma_1 + u'_2 \cdot \gamma_2 + \dots + u'_n \cdot \gamma_n = 0$$

$$u'_1 \cdot \gamma'_1 + u'_2 \cdot \gamma'_2 + \dots + u'_n \cdot \gamma'_n = 0$$

$$u'_1 \cdot \gamma''_1 + u'_2 \cdot \gamma''_2 + \dots + u'_n \cdot \gamma''_n = 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$u'_1 \cdot \gamma^{(n-1)}_1 + \dots + u'_n \cdot \gamma^{(n-1)}_n = g(t).$$

En términos matriciales, podemos escribir

$$W(t) \cdot u = g(t) \cdot e_n,$$

donde $W(t)$ es la matriz *Wronskiana*, definida en el sub-apartado b.1.2. de la sección C. de este capítulo, u es el vector de incógnitas, $g(t)$ es el término de la ecuación no homogénea, y e_n es un vector columna de n componentes, cuya n -ésima componente es 1 y todas las demás son 0.

Sabemos que, por ser $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, son linealmente independientes, por lo que $W(t) = \det[W(t)]$ es no nulo, y $W(t)$ es invertible. De allí que siempre podamos escribir

$$u = g(t)W(t)^{-1} \cdot e_n.$$

Para obtener cada componente de u por separado, puede usarse la regla de Cramer, que implica, para $k = 1, 2, \dots, n$,

$$u'_k(t) = g(t) \cdot W_k(t) / W(t),$$

donde $W_k(t)$ es el determinante de la matriz que se obtiene al suplantar en $W(t)$ su k -ésima columna por e_n .

Integrando las n derivadas $u'_k(t)$ con respecto a t , lo que

puede ser muy difícil, y sustituyendo cada resultado en

$$y_p = u_1(t) \cdot \gamma_1 + u_2(t) \cdot \gamma_2 + \dots + u_n(t) \cdot \gamma_n,$$

tenemos,

$$y_p(t) = \sum_{m=1}^n \gamma_m(t) \cdot \int_0^t [q(s) \cdot W_m(s) / W(s)] ds$$

E. Segunda nota sobre estabilidad. Ecuaciones con coeficientes constantes.

Si son negativas las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica correspondiente a una ecuación diferencial **homogénea** de n -ésimo orden con coeficientes reales constantes, el valor de la función y_c tiende a 0 cuando t tiende a infinito. Tal ecuación tiene un *equilibrio asintóticamente estable* en $y_{ce} = 0$. La ecuación **no homogénea** a la cual puede asociarse tiene definido el equilibrio por y_p . Si y_p es constante, el equilibrio es *estacionario*. Si no, es *móvil*.

El **teorema de Routh-Hurwitz**, que no demostramos, permite determinar, sin resolver la ecuación, si son negativas las partes reales de todas las raíces de la ecuación polinómica de grado n

$$a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n = 0.$$

Esto ocurre, según el teorema, si y sólo si los n primeros determinantes de la sucesión

$$a_1, \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}, \dots$$

son positivos y $a_0 > 0$.

CAPITULO IV.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales que se presentarán en este capítulo son de la forma

$$\begin{aligned}x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\&\vdots \\x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ dependen todas de una sola, t .

El sistema se define para un cierto intervalo I .

Si el sistema puede escribirse como

$$\begin{aligned}x_1' &= p_{11}(t) \cdot x_1 + \dots + p_{1n}(t) \cdot x_n + g_1(t), \\&\vdots \\x_n' &= p_{n1}(t) \cdot x_1 + \dots + p_{nn}(t) \cdot x_n + g_n(t),\end{aligned}$$

se dice que es *lineal*. Si todas las funciones $g_k(t)$ son idénticamente nulas en I , el sistema es **homogéneo**. Si al menos una no lo es, es **no homogéneo**.

El sistema tiene *solución* en I si existe un conjunto de n funciones, $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, que le satisfagan en todo I . Pueden establecerse condiciones iniciales de la forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0,$$

donde t_0 es un valor de t en I , y los x_k^0 , $k = 1, \dots, n$, son números asignados. Resolver un sistema que satisfaga dichas condiciones es resolver un problema de valores iniciales. Pueden probarse, lo que no haremos, teoremas que afirman la existencia de una única solución, dentro de un intervalo definido, para cada problema de valores iniciales en sistemas lineales o no lineales,

si las funciones conocidas involucradas cumplen ciertas condiciones. Para el sistema lineal, las funciones p_{ij} y q_j , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$, deben ser continuas en I , que contiene a t_0 . Para el sistema no lineal, las funciones F_k y las n derivadas parciales de cada F_k con respecto a x_k , $k = 1, \dots, n$, deben ser continuas en una región R del espacio $tx_1 \dots x_n$, que contiene al punto $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Dos ecuaciones están *ligadas* si tienen ambas una variable dependiente en común. Siendo esto lo habitual, las ecuaciones que forman el sistema *ligado* deben resolverse simultáneamente, a menos que se encuentren métodos que permitan hacer el sistema *no ligado*, cuyas ecuaciones puedan resolverse consecutivamente.

Es importante destacar que toda ecuación de n -ésimo orden puede expresarse como un sistema de ecuaciones de primer orden.

Considérese

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Definanse las variables $x_1, x_2 + \dots + x_n$ como

$$x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)},$$

de donde

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = x_3,$$

$$x_{n-1}' = x_n,$$

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

caso especial del sistema presentado al comienzo.

Este capítulo se divide en dos secciones. En la primera se abordarán temas relativos a la solución *cuantitativa* de los

sistemas lineales. En la segunda se hará referencia a dos formas de evaluar la estabilidad de sistemas autónomos, no necesariamente lineales, de dos ecuaciones.

A. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden.

Antes de comenzar la primera sección, es preciso hacer una nueva referencia sobre la notación. En el apartado a. de la sección B. del **Capítulo III** se afirmó que podía considerarse vector toda función solución, y , puesto que era elemento del espacio vectorial $C^n(I)$. Igualmente, se consideraron vectores sus n derivadas. Siendo legítimo y útil escribir las funciones y , y' , ..., $y^{(n)}$ como los vectores y , y' , ..., $y^{(n)}$, se hizo en buena parte del capítulo anterior.

En este capítulo retornamos a la notación vectorial, pero no la empleamos de la misma manera. Observemos nuevamente el sistema lineal ya presentado

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t) \cdot x_1 + \dots + p_{1n}(t) \cdot x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_n' = p_{n1}(t) \cdot x_1 + \dots + p_{nn}(t) \cdot x_n + g_n(t).$$

Todo sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en términos matriciales. Así, el sistema anterior puede escribirse como

$$x' = P(t) \cdot x + g(t),$$

donde x es un vector $n \times 1$ cuyas componentes son las n funciones desconocidas, x' es el vector $n \times 1$ cuyas componentes son sus n primeras derivadas y $g(t)$ es el vector $n \times 1$ cuyas componentes son los n términos de cada ecuación diferencial, funciones que supondremos continuas en I . $P(t)$ es una matriz $n \times n$ cuyos ele-

mentos son las funciones p_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$, supuestas también continuas en I .

Sabiendo que cada función x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, es elemento del espacio vectorial $C^n(I)$, podemos convenir en la posibilidad de escribirla, con notación vectorial, como x_k . Esto nos conduciría a declarar que el vector x tiene por componentes n vectores. Formalmente no hay contradicción en lo afirmado. Sin embargo, para hacer más clara la exposición, se utilizará la notación vectorial sólo para escribir sintéticamente los sistemas de ecuaciones y transformarlos mediante procedimientos de álgebra lineal.

Es conveniente advertir, por último, que los sistemas con coeficientes variables serán mencionados sólo tangencialmente, puesto que su estudio es de una dificultad superior a la que puede alcanzarse en estas páginas.

a. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes.

a.1. Algunas características comunes a los sistemas con coeficientes constantes y variables.

Hemos visto ya que un sistema lineal no homogéneo con coeficientes variables puede escribirse como

$$x' = P(t).x + g(t).$$

Sabemos que si $g(t)$ es el vector nulo, 0 , el sistema es el homogéneo asociado al no homogéneo, de la forma

$$x' = P(t).x.$$

La solución general del sistema homogéneo, sumada a una solución particular del no homogéneo, permite determinar la solución general del sistema no homogéneo. Esta afirmación, que

no demostramos, y algunas que hallaremos luego, son análogas a las presentadas en el **Capítulo III** para ecuaciones **homogéneas** de n -ésimo orden.

Enunciaremos dos características de la estructura de soluciones del sistema **homogéneo** que nos serán útiles en lo sucesivo.

* Puesto que el vector x de incógnitas es un vector columna con n componentes, un vector de soluciones debe ser un vector columna con n componentes.

* Puesto que cada elemento de x' es una combinación lineal de n funciones diferentes, todo vector solución de

$$x' = P(t).x$$

debe poder expresarse como combinación lineal de n vectores solución, linealmente independientes.

Lo anterior nos permite afirmar que, para ser $X(t)$ un *conjunto fundamental de soluciones* para el sistema **homogéneo**, debe ser una matriz $n \times n$, con n vectores columna, $x^{(j)} = x^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, cada uno con n componentes, $x_i^{(j)}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Así, podemos escribir

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

o

$$X(t) = [x^{(1)}(t) : x^{(2)}(t) : \dots : x^{(n)}(t)].$$

A pesar de ser diferente al definido en el sub-apartado b.1.2 de la sección C. del **Capítulo III**, el determinante de esta matriz es llamado *Wronskiano* de las n soluciones, escribiéndose

$$\det X = W [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}].$$

En base a todo lo expuesto hasta ahora en esta sección, se puede escribir el vector x como la combinación

$$x = c_1 \cdot x^{(1)}(t) + \dots + c_n \cdot x^{(n)}(t),$$

donde $c_1, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias. En notación matricial, esto sería equivalente a

$$x = X(t) \cdot c.$$

Existirá una solución única para un problema de valores iniciales si, asignándose valores a $x = x(t)$ y a $X(t)$ en $t = t_0$, puede encontrarse un único vector c . Esto es posible siempre que el *Wronskiano* no se anule, hecho que se verifica sólo si los vectores $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ son linealmente independientes. Pudiendo t_0 ser cualquier t en I , concluimos que el *conjunto fundamental de soluciones* para el sistema homogéneo debe contener n vectores solución linealmente independientes, con n funciones componentes cada uno.

Si exigimos que

$$P(t) = A,$$

donde A es la matriz $n \times n$ de números reales

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

el sistema

$$x' = P(t) \cdot x$$

se convierte en

$$x' = A \cdot x,$$

que determina un sistema *homogéneo* de ecuaciones con coeficientes

constantes. Estudiaremos este sistema a continuación.

a.2. Sistema homogéneo de ecuaciones con coeficientes constantes.

a.2.1. Método 1 (sin diagonalizar A).

Sea el sistema

$$x' = A.x.$$

Sabemos que x debe contener n componentes, pero no sabemos cuáles. Por analogía con lo ya expuesto, propondremos

$$x = v.e^{r \cdot t},$$

donde v , es un vector constante desconocido $n \times 1$. Para conocer x debe determinarse primero v .

Sustituyendo la forma propuesta de x en el sistema, tenemos

$$r.e^{r \cdot t}.v = A.v.e^{r \cdot t},$$

que puede reducirse a

$$r.v = A.v.$$

Notemos que en este sistema debemos determinar dos incógnitas, el escalar r y el vector v , relacionadas por una condición, que llamaremos primera. Si establecemos que v debe ser diferente de 0, r será un eigenvalor de A , y v un eigenvector de A , correspondiente a r .

Para determinarlos, reescribamos lo anterior como

$$(A - r.I).v = 0.$$

Para que este sistema no tenga sólo la solución trivial, esto es para que $v \neq 0$ sea solución, es preciso que

$$\Delta(r) = \det(A - r.I) = 0.$$

Esta igualdad, denominada ecuación característica, nos suministra la segunda condición.

Como puede verificarse,

$$\det (A - r.I) = d_0 \cdot r^n + d_1 \cdot r^{n-1} + \dots + d_{n-1} \cdot r + d_n,$$

donde, por ser A matriz de números reales, $d_0, \dots, d_n$ son números reales.

Con esto, el problema se reduce a hallar las n raíces de una ecuación polinomial. Conocidos estos, se sustituyen en la primera condición, determinándose los n eigenvectores de A , $v_1, \dots, v_n$, correspondientes a los n eigenvalores de A , $r_1, \dots, r_n$.

Como las raíces de la ecuación pueden ser reales o complejos, y pueden repetirse, los eigenvectores pueden ser reales o complejos, y pueden repetirse. Esto es muy importante para el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

En las próximas líneas expondremos sólo los casos cuyos eigenvalores no se repiten, puesto que tienen un método general de solución.

a.2.1.1. Eigenvalores reales no repetidos.

Sean $v_1, \dots, v_n$ los n eigenvectores de A correspondientes a los eigenvalores $r_1, \dots, r_n$, reales y distintos. Puede probarse los n eigenvectores son linealmente independientes. Por lo tanto, el conjunto de los n vectores solución

$$x^{(k)}(t) = e^{r_k \cdot t} v_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

es un conjunto linealmente independiente.

En consecuencia, la solución general de la ecuación homogénea es, en este caso, la combinación lineal

$$x = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} v_1 + \dots + c_n \cdot e^{r_n \cdot t} v_n.$$

a.2.1.2. Eigenvalores complejos no repetidos.

A continuación se utilizarán conceptos expuestos en los sub-apartados b.2., c.2.1.2. y c.2.2.2. de la sección C. del Capítulo III.

Sabemos que si un número complejo es raíz de una ecuación polinomial con coeficientes reales, su conjugado también lo es. En lo siguiente supondremos que sólo un par de números complejos conjugados son raíces de la ecuación característica,

$$r_1 = h + i.v \quad \text{y} \quad \bar{r}_1 = h - i.v.$$

Obtendremos los dos eigenvectores correspondientes sustituyendo las raíces en la primera, de modo que, por medio de

$$(A - r_1 \cdot I) \cdot v_1 = 0 \quad \text{y} \quad (A - \bar{r}_1 \cdot I) \cdot \bar{v}_1 = 0,$$

determinamos los eigenvectores complejos

$$v_1 = a + i.b \quad \text{y} \quad \bar{v}_1 = a - i.b.$$

Las dos soluciones correspondientes del sistema son

$$x^{(1)}(t) = e^{r_1 \cdot t} v_1 \quad \text{y} \quad x^{(2)}(t) = e^{\bar{r}_1 \cdot t} \bar{v}_1.$$

Es posible convertir estas soluciones de valores complejos en soluciones de valores reales. Para ello basta encontrar dos soluciones de este tipo, linealmente independientes, en $x^{(1)}$ o en $x^{(2)}$. Considerar la combinación lineal de ambas nos conduciría al mismo resultado.

Comenzamos reescribiendo $x^{(1)}$,

$$x^{(1)}(t) = e^{(h+i.v) \cdot t} \cdot (a + i.b).$$

Expresando $e^{i.v \cdot t}$ en forma polar, tenemos

$$= e^{h \cdot t} \cdot (\cos vt + i \cdot \operatorname{sen} vt) \cdot (a + i.b).$$

Resolviendo el producto y asociando términos según si tienen o no el factor imaginario i , podemos resumir la igualdad anterior con

$$x^{(1)}(t) = u(t) + i.z(t),$$

donde

$$u(t) = e^{h \cdot t} \cdot (a \cdot \cos vt - b \cdot \operatorname{sen} vt)$$

y

$$z(t) = e^{h \cdot t} \cdot (a \cdot \cos vt + b \cdot \sin vt).$$

Puede probarse, lo que no haremos, que ambas funciones son linealmente independientes. Si el resto de los eigenvalores son reales y repetidos, la solución general de la ecuación homogénea que estudiamos sería la combinación

$$x = c_1 \cdot u(t) + c_2 \cdot z(t) + c_3 \cdot e^{r_3 \cdot t} v_3 + \dots + c_n \cdot e^{r_n \cdot t} v_n.$$

a.2. Método 2 (diagonalizando A).

Sea el conjunto no ligado de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} y_1' &= d_{11} \cdot y_1, \\ y_2' &= d_{22} \cdot y_2, \\ &\vdots \\ y_n' &= d_{nn} \cdot y_n, \end{aligned}$$

donde $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}$, son números reales.

Podemos escribir el conjunto anterior como

$$\begin{aligned} y_1' &= d_{11} \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \dots + 0 \cdot y_{n-1} + 0 \cdot y_n, \\ y_2' &= 0 \cdot y_1 + d_{22} \cdot y_2 + \dots + 0 \cdot y_{n-1} + 0 \cdot y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \dots + 0 \cdot y_{n-1} + d_{nn} \cdot y_n. \end{aligned}$$

En términos matriciales, lo anterior sería

$$y' = D \cdot y,$$

donde D es una matriz diagonal, esto es, una matriz cuadrada $n \times n$ cuyos elementos d_{ij} son distintos de 0 sólo cuando $i = j$.

Ciertamente, un conjunto no ligado como el presentado al comienzo no requiere de métodos matriciales para hallar las n

soluciones requeridas, puesto que las ecuaciones no pueden resolverse simultáneamente, sino cada una por separado. Sin embargo, la solución de sistemas de la forma

$$x' = A.x$$

puede simplificarse si el problema puede reducirse a resolver un sistema

$$y' = D.y.$$

Para hacer esto es necesario que A sea *diagonalizable* y que haya una relación conocida entre x y y .

A es *diagonalizable* si existe una matriz inversible V , tal que

$$V^{-1}.A.V = D.$$

Exponer el proceso que justifica la expresión anterior nos conduciría a estudiar por qué cualquier transformación lineal $T: V \rightarrow W$, donde V y W son espacios lineales con dimensión finita, puede considerarse como una transformación matricial, y cómo puede hacerse esto (*). Abordar este punto está fuera del alcance de este trabajo, por lo que aceptaremos la afirmación sin demostración.

Afortunadamente, si podemos demostrar que la matriz D tiene en su diagonal los n eigenvalores de A , y que la matriz V tiene por vectores columnas los n eigenvectores de A , correspondientes a cada eigenvalor.

Si A es diagonalizable, existe V inversible tal que $V^{-1}.A.V = D$, por lo que, premultiplicando por V , $A.V = V.D$,

(*) Ver Anton, 1989, págs. 284-296.

es decir,

$$A.V = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & r_n \end{bmatrix}.$$

Resolviendo la multiplicación, tenemos

$$A.V = \begin{bmatrix} r_1 \cdot v_{11} & \dots & r_n \cdot v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_1 \cdot v_{n1} & \dots & r_n \cdot v_{nn} \end{bmatrix}.$$

Podemos escribir las matrices V y $V.D$ como

$$V = [v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n]$$

y

$$V.D = [r_1 \cdot v_1 \mid r_2 \cdot v_2 \mid \dots \mid r_n \cdot v_n],$$

de donde

$$A.v_1 = r_1 \cdot v_1, \quad A.v_2 = r_2 \cdot v_2, \quad \dots, \quad A.v_n = r_n \cdot v_n.$$

Puesto que V es inversible, $v_1, v_2, \dots, v_n$ son vectores diferentes de cero y linealmente independientes. Los vectores y los escalares $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ que satisfacen las igualdades anteriores son los eigenvectores y eigenvalores de A .

Retornemos a los sistemas

$$x' = A.x \quad \text{y} \quad y' = D.y.$$

La relación entre x y y es consecuencia de la definición

$$V^{-1}.A.V = D.$$

Sustituyendo D en $y' = D.y$, tendremos

$$y' = (V^{-1}.A.V).y.$$

Si premultiplicamos por V , obtendremos

$$V.y' = A.(V.y).$$

Comparando con $x' = A.x$, y recordando que los vectores que forman V tienen componentes constantes, establecemos que

$$x = V.y.$$

De lo anterior, podemos concluir lo siguiente. Conocidas las funciones y , que pueden hallarse consecutivamente, pueden colocarse sobre la diagonal principal de una matriz diagonal Q . El conjunto fundamental de soluciones X se definiría a través de

$$X = V.Q.$$

b. Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes.

b.1. Método 1 (matriz de coeficientes diagonalizable).

Sea el sistema

$$x' = A.x + g(t),$$

donde A es diagonalizable. Utilizando los resultados del subapartado anterior, puede escribirse el vector solución x como

$$x = V.y,$$

donde V es una matriz $n \times n$ cuyos vectores columna son los eigenvectores de A . Dicha matriz es *invertible*, y puede *diagonalizar* la matriz A . El vector y es un vector cuyos elementos son funciones desconocidas. Igual que en el caso expuesto en la sección anterior, este cambio de variables permitirá *desligar* las ecuaciones del sistema, facilitando hallar su solución.

Sustituyendo x en el sistema, tenemos

$$V.y' = A.V.y + g(t).$$

Premultiplicando cada miembro de la igualdad por la inversa de V , se obtiene

$$y' = (V^{-1}.A.V).y + V^{-1}.g(t),$$

que puede escribirse de la forma

$$y' = D.y + h(t),$$

donde $h(t) = V^{-1}.g(t)$ y D es la matriz A diagonalizada, cuya diagonal principal contiene los n eigenvalores de A .

Cada fila del sistema anterior puede representarse como

$$y'_k(t) = r_k.y_k(t) + h_k(t), \quad k = 1, \dots, n,$$

donde r_k es el k -ésimo eigenvalor de A y $h_k(t)$ es combinación lineal de $g_1(t), \dots, g_n(t)$. Esta expresión es una ecuación diferencial **no homogénea** de primer grado, cuya solución *general*, como se expuso en el sub-apartado **b.** de la sección **A.** del **Capítulo I**, es una función de la forma

$$y_k(t) = c_k.e^{r_j.t} + e^{r_j.t} \int h_k(s).e^{-r_j.s} ds.$$

Conocida cada solución $y_k(t)$, puede construirse el vector y y regresar a x , la variable original. Así, puede escribirse el vector x , solución *general* del sistema **no homogéneo** dado, como

$$x = V.y.$$

b.2. Método 2 (matriz de coeficientes no diagonalizable).

Supóngase que la matriz A no es diagonalizable, o que, en lugar de una matriz A de coeficientes constantes, disponemos de una matriz $P(t)$ de coeficientes variables.

Sea el sistema **no homogéneo**

$$x' = P(t).x + g(t).$$

Aplicaremos el **método de variación de parámetros** a este sistema, para hallar, no una de sus soluciones *particulares*, como en el sub-apartado **b.** de la sección **D.** del **Capítulo III**, sino, directamente, la solución *general* del sistema **no homogéneo**.

Para aplicar el método, precisamos, como en el caso ante-

rior, conocer la solución *general*, x_c , del sistema homogéneo asociado

$$x' = P(t).x,$$

que puede escribirse como combinación lineal de los n vectores que forman el conjunto fundamental de soluciones, $X(t)$, esto es, como

$$x_c = X(t).c.$$

Si *vari*amos parámetros, cambiando los coeficientes constantes que componen c por funciones incógnitas, $u_1(t), \dots, u_n$, tenemos

$$x = X(t).u(t),$$

donde haremos del vector x la solución *general* del sistema no homogéneo, y de $u(t)$ el vector que contiene las funciones incógnitas que se definirán de manera que la igualdad postulada se verifique. Postergaremos su definición hasta el final, estableciendo primero las relaciones que nos llevan a ella.

Sustituyendo x en el sistema no homogéneo, tenemos

$$X'(t).u(t) + X(t).u'(t) = P(t).X(t).u(t) + g(t).$$

Puesto que $X(t)$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo, se cumple que

$$X'(t) = P(t).X(t),$$

de donde

$$X(t).u'(t) = g(t).$$

Premultiplicando la expresión anterior por la inversa de $X(t)$, se despeja la primera derivada de $u(t)$ con respecto a t , que asume la forma

$$u'(t) = X^{-1}(t).g(t).$$

Integrando una vez la expresión anterior, se tiene

$$u(t) = \int^t X^{-1}(s).g(s)ds + c.$$

Si sustituimos la expresión anterior en

$$x = X(t).u(t),$$

obtenemos

$$x = X(t).c + X(t).\int^t X^{-1}(s).g(s)ds.$$

Puede reconocerse en el primer término del segundo miembro al vector x_c , solución *general* del sistema **homogéneo** asociado. El segundo término es una solución *particular* del sistema **no homogéneo**. Por lo tanto, x es su solución *general*.

La condición inicial en un problema de valores iniciales para un sistema de ecuaciones se define asignando valores, x_k^0 , a cada función x_k , elemento de x , en t_0 , de manera que, partiendo de

$$x(t_0) = x^0,$$

puede determinarse el valor del vector c de coeficientes mediante

$$c = X^{-1}(t_0).x^0.$$

B. Estabilidad en sistemas autónomos lineales y no lineales.

En la sección c. del Capítulo I se hizo referencia a la importancia de saber si una ecuación diferencial tiene puntos de equilibrio, cuántos y cómo caracterizarle según su tipo de estabilidad. En esta sección intentaremos exponer dos métodos que

permiten determinar el tipo de estabilidad en sistemas autónomos de dos ecuaciones simultáneas, *sin resolverlos*. Para hacerlo, definiremos primero sistema autónomo y luego punto de equilibrio, señalando su clasificación según tipo de estabilidad.

Se define como *sistema autónomo* de ecuaciones todo sistema en cuyas ecuaciones la variable t no aparece explícitamente.

En lo sucesivo, consideraremos un sistema autónomo de dos ecuaciones simultáneas de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y),$$

donde $x = f(t)$ y $y = g(t)$, las funciones F y G son continuas y tienen derivadas parciales en algún dominio del plano ty . Estas condiciones aseguran la existencia de una solución *particular* única a un problema de *valores iniciales*. En esta sección, la *condición inicial* no se asigna indicando el valor de las funciones cuando $t = t_0$, sino suponiendo un único valor de $t = t_0$ que permite la satisfacción simultánea de ambas ecuaciones en el punto (x_0, y_0) . Es importante resaltar que este es un punto común a dos funciones específicas, $x_p = f(t)$ y $y_p = g(t)$, que, juntas, constituyen la solución *particular* única del sistema que satisface la condición inicial dada.

Un *punto de equilibrio* o *punto crítico* es una solución *particular* del sistema, dada por un punto (x_e, y_e) tal que las derivadas de las funciones x y y con respecto a t son simultáneamente nulas. Es, por lo tanto, la solución *constante* del sistema. Puesto que las condiciones establecidas garantizan la existencia y unicidad de toda solución *particular*, podemos

afirmar que existe un único punto de equilibrio.

Un punto de equilibrio es *asintóticamente estable* si, luego de una perturbación que saque al sistema del equilibrio, los valores de todas las soluciones del sistema tienden a tomar los de equilibrio cuando t tiende a infinito. Si esto ocurre sólo "cerca" del equilibrio, se dice que el punto es *localmente estable*. Si no importa que tan cerca se esté del equilibrio, el punto es llamado *globalmente estable*.

Si algunos o todos los valores de las soluciones del sistema tienden a alejarse del punto de equilibrio, cuando t tiende a infinito, luego de una perturbación, se dice que el punto es *inestable*.

Si, después de la perturbación, los valores de las soluciones del sistema ni se acercan ni se alejan del punto de equilibrio, oscilando sobre él o girando a su alrededor cuando t tiende a infinito, el punto es denominado *estable*.

Nótese que tanto un sistema lineal como uno no lineal son sistemas *autónomos* si cumplen con las condiciones preescritas. Puesto que las conclusiones resultantes de analizar cada sistema serán las mismas en ambos casos, nos afincaremos en lo siguiente sobre el caso no lineal, expresando cada ecuación como una función implícita. En ocasiones es muy difícil resolver sistemas de este tipo, por lo que los métodos que presentamos a continuación, al permitir determinar el tipo de estabilidad de los equilibrios si hallar su solución, son muy útiles.

a. Diagramas de fase.

a.1. Notas centrales.

Reescribamos el sistema autónomo, esta vez de la forma

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y) ..$$

Observemos que las derivadas de cada función con respecto a t , que consideraremos representa la variable *tiempo*, están definidas como funciones sólo de x y y , por lo que tales derivadas pueden representarse en un plano cartesiano tal que los valores de x se coloquen sobre el eje de abscisas y los de y sobre el de ordenadas. El plano xy resultante es llamado *plano fase*.

Puesto que hemos establecido que nuestro sistema autónomo debe tener un único punto de equilibrio, y que se sitúa donde, simultáneamente, $x' = 0$ y $y' = 0$, sabemos que podremos encontrar en el plano fase un punto (x_e, y_e) que cumpla con la condición indicada.

Para hacerlo, basta resolver el sistema

$$F(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, y) = 0,$$

donde cada ecuación indica el lugar geométrico de todos los puntos (x, y) tales que en ellos las funciones derivadas, x' y y' , se anulan. Por el supuesto de único equilibrio, ambos conjuntos de puntos deben tener un único punto en común, que llamamos (x_e, y_e) , y que supondremos en las siguientes páginas sólo se encuentra en el primer cuadrante del plano fase. De esta manera, hemos hallado gráficamente el punto de equilibrio.

Ahora requerimos determinar el tipo de estabilidad del punto. Sabemos que su clasificación depende del comportamiento de los valores de las soluciones del sistema cuando t tiende a infinito, por lo cual nos basta representar gráficamente

soluciones representativas de todas las posibles y determinar si se acercan, se alejan u oscilan en torno a (x_e, y_e) cuando t tiende a infinito.

Hemos escrito que cada solución particular está dada por un par de funciones de t , $x_p = f(t)$ y $y_p = g(t)$. El lugar geométrico de todos los puntos (x, y) que corresponden a ambas funciones puede graficarse sobre el plano fase. La gráfica de una solución es llamada *trayectoria*.

Por supuesto, determinar directamente las direcciones de las trayectorias representativas puede resultar imposible. Para hacerlo gráficamente, es preciso evaluar las derivadas de cada ecuación de los sistemas

$$x' = F(x, y) \quad \text{y} \quad y' = G(x, y)$$

y

$$F(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, y) = 0.$$

Una explicación general del método es indeseable, dada la complejidad de los casos particulares. Sin embargo, intentaremos tal explicación mientras nos encontremos sobre el tronco común del cual parten tales casos.

Notemos que cada ecuación del primer sistema define todos los puntos del plano fase como las derivadas x' y y' , y que las ecuaciones del segundo separan del plano fase sólo los puntos que anulan tales derivadas, es decir, donde las funciones x y y no varían ante una variación infinitesimal del tiempo. Por esta razón, cualquier punto del plano fase que no se halle en una de las ecuaciones del segundo sistema indica derivadas x' y y' positivas o negativas con respecto a t .

Antes de hacer un análisis de conjunto, analicemos qué ocurre cuando $x' > 0$, y cómo saber en cuáles partes del plano fase esto sucede. Para ello, presentamos gráficamente tres ejemplos diferentes, considerando sólo las ecuaciones $x' = F(x, y)$ y $F(x, y) = 0$.

Caso 1 (Gráfica IV. 1.)

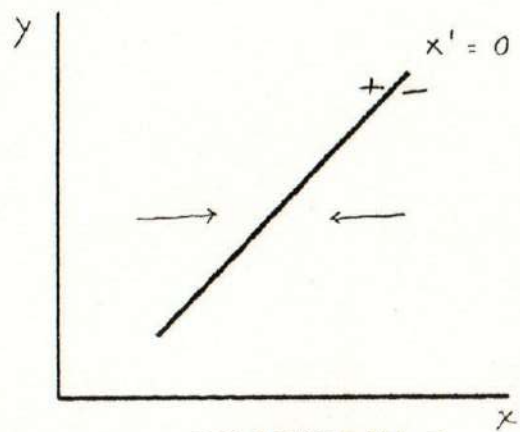
Supondremos que la derivada implícita de y con respecto a x tomada en la segunda ecuación es *positiva*. Por tanto, esta función puede dibujarse como una curva creciente en el plano fase.

Supondremos además que la derivada parcial de x' con respecto a x en la primera ecuación es *negativa*. Por tanto, a medida que aumenta el valor de x el valor de x' se hace menor.

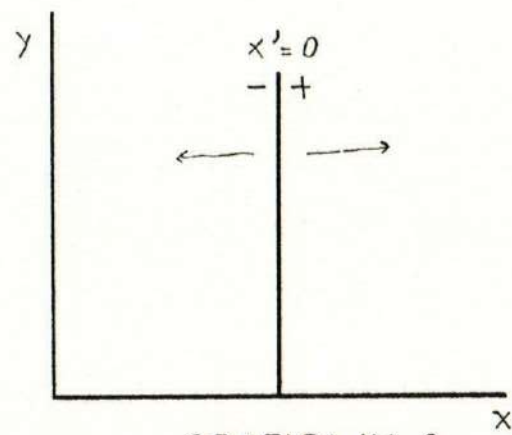
Tomemos cualquier valor para y , y mantengámosle constante. Hallemos el valor de x para el cual, dado y , $x' = 0$. Por lo escrito en el párrafo anterior, sabemos que a la derecha de este punto $x' < 0$, y a la izquierda, $x' > 0$.

Puesto que y puede ser cualquier valor en el eje de ordenadas, la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$ divide en dos semiplanos al plano fase, siendo todas las funciones $x = f(t)$ a su derecha funciones cuya derivada con respecto a t es negativa, y, a su izquierda, con derivada positiva.

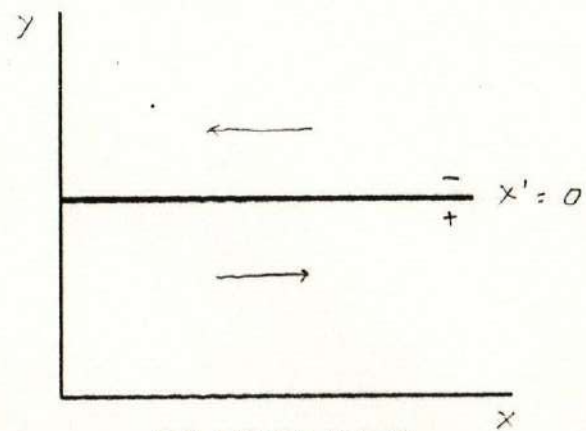
Por ello, aunque t no aparece explícitamente en el plano, pueden dibujarse flechas horizontales a cada lado de $F(x, y) = 0$, indicando la dirección de los cambios en $x = f(t)$ cuando se incrementa t . Por lo expuesto en el párrafo anterior, puede comprenderse que ambas apunten hacia la gráfica donde $x' = 0$.



GRAFICA IV. 1.



GRAFICA IV. 2.



GRAFICA IV. 3.

Caso 2 (Gráfica IV.2.).

Supondremos que la derivada implícita *tiende a infinito*, y que la derivada parcial es *positiva*.

Por medio del mismo tipo de análisis del Caso 1, puede concluirse que ambas flechas apuntan en dirección opuesta a las de dicho caso.

Caso 3 (Gráfica IV.3.).

Supondremos que la derivada implícita es *nula*.

La derivada parcial de x' con respecto a x también es igual a 0, por lo que no nos permite saber en cual de los dos semiplanos $x' > 0$. Para determinar esto, se usa la derivada parcial de x' con respecto a y , puesto que permite hallar el signo del incremento de x' a medida que y asume valores mayores. Recuérdese que lo importante es saber cómo varía x cuando aumenta t , esto es, cuál es el signo de x' .

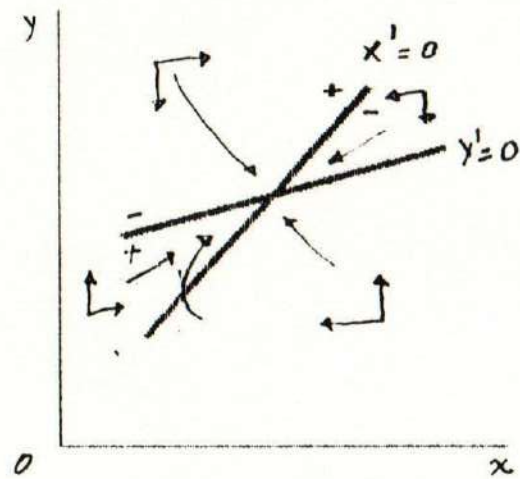
Supongamos que la derivada parcial de x' con respecto a y es *negativa*.

Tomemos cualquier valor de x y mantengámosle constante. Hallemos el valor de y para el cual $x' = 0$. Por lo escrito en el párrafo anterior y en el Caso 1, inferimos que $x' > 0$ en el semiplano inferior, y que $x' < 0$ en el superior.

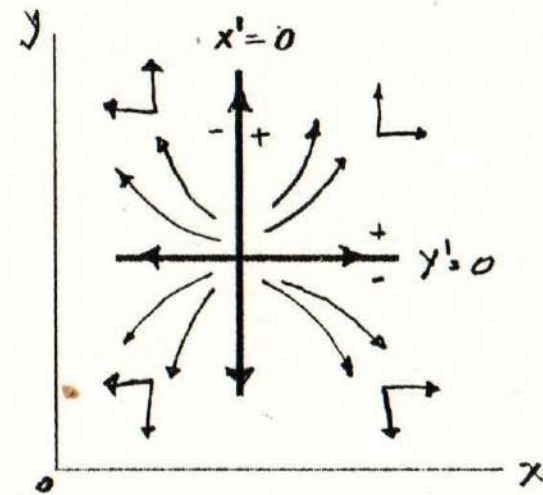
Puesto que las derivadas x' indican variaciones de x , las líneas continúan siendo horizontales: las del semiplano inferior apuntan a la derecha y las del superior a la izquierda.

----- 0 -----

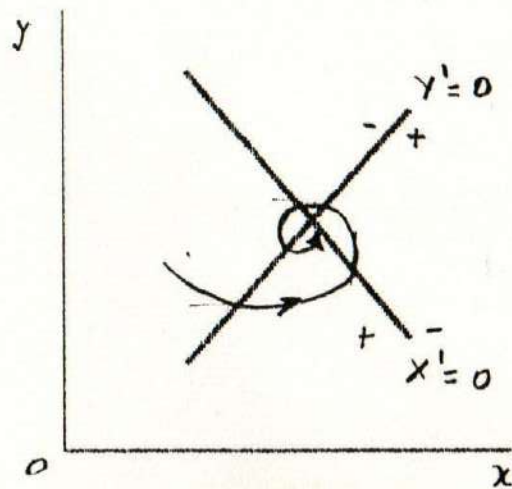
Estos tres casos son sólo ejemplos escogidos para x . Para y el análisis es similar, conduciendo al dibujo de dos flechas verticales para cada semiplano determinado por $G(x, y) = 0$.



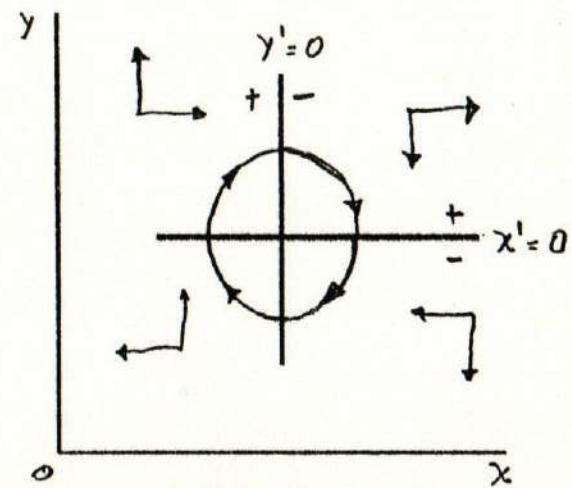
GRAFICA IV. 4.



GRAFICA IV. 5.



GRAFICA IV. 6.



GRAFICA IV. 7.

equilibrio, cuando t tiende a infinito.

Ejemplo 4 (Gráfica IV. 7.).

Vórtice o centro.

Toda trayectoria es una curva cerrada, una elipse, por ejemplo, cuando t tiende a infinito. Este tipo de trayectoria corresponde a la gráfica de una solución compuesta por un par de funciones *periódicas* con periodo T para toda t , esto es, tales que $x = f(t + T) = f(t)$ y que $y = g(t + T) = g(t)$ para toda t . El equilibrio es, por tanto, estable.

Ejemplo 5 (Gráfica IV. 8.).

Punto de silla.

Toda trayectoria, con excepción de un par, se aleja del punto de equilibrio cuando t tiende a infinito. Por tanto, el equilibrio es inestable.

----- 0 -----

Para concluir este sub-apartado, anotaremos tres afirmaciones importantes sobre las trayectorias.

1. Por cada punto del plano fase pasa sólo una trayectoria.
2. Los valores de una trayectoria que parte de un punto no crítico no alcanzan el punto de equilibrio en un tiempo finito.
3. Ninguna trayectoria se cruza a sí misma, a menos que sea periódica.

a.2. Notas adicionales.

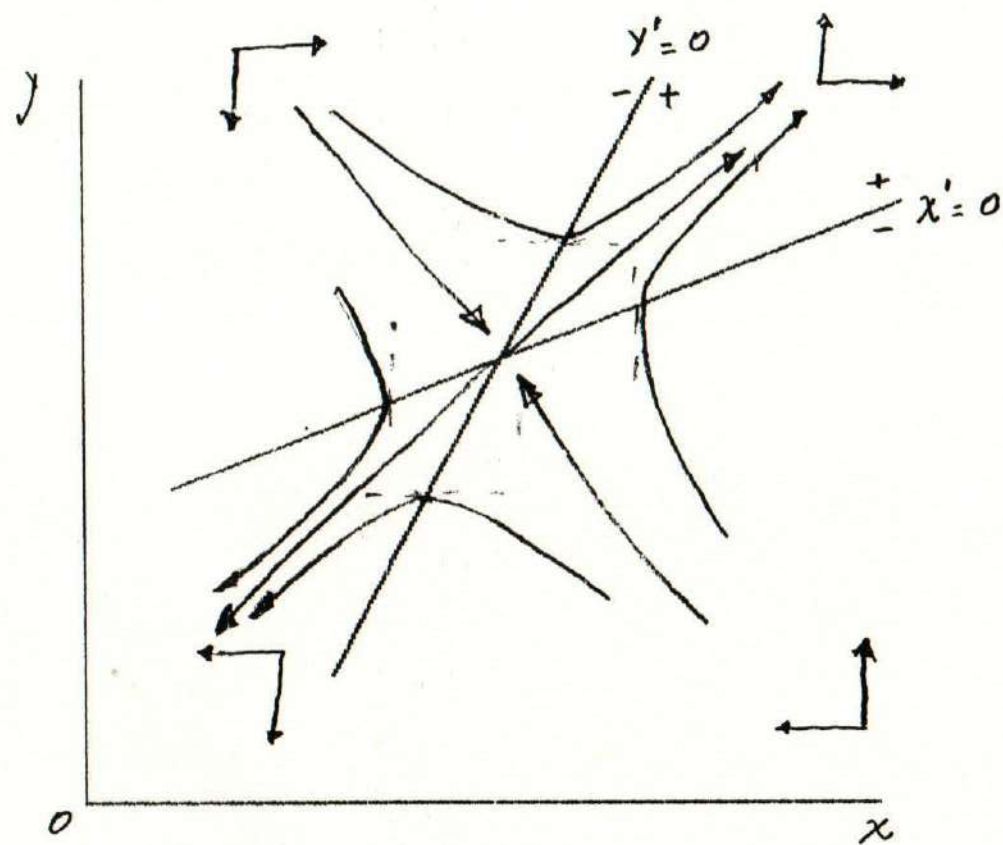
Las siguientes proposiciones se copian sin demostración.

a.2.1. Sistema lineal autónomo de dos ecuaciones.

Sea el sistema lineal

$$x' = a.x + b.y \qquad y' = c.x + d.y,$$

cuyas ecuaciones tienen coeficientes constantes.



GRAFICA IV. 8.

Por lo estudiado en el sub-apartado a.2.1. de la sección A. de este capítulo, se sabe que su solución dependerá de las raíces que se determinen de la ecuación característica

$$r^2 - (a + b).r + (a.d - b.c) = 0.$$

Para garantizar que las raíces sean no nulas, $(a.d - b.c)$ debe ser no nula.

Si las partes reales de ambas raíces son negativas, el punto de equilibrio es *asintóticamente estable*. Si una o ambas son positivas, el punto es *inestable*. Si ambas son complejas sin parte real, el equilibrio es *estable*.

Si las raíces son sólo reales, y del mismo signo, el equilibrio es un *nodo*. Si son de distinto signo, es un *punto de silla*. Si son ambas complejas, con parte real, es un *foco o punto espiral*. Si no tienen parte real, el equilibrio es un *vórtice o centro*.

Puesto que, al aplicar la teoría, los coeficientes deben estimarse haciendo mediciones, *errores de medición* pueden inducir a una apreciación errónea del tipo de equilibrio. El caso más sensible es el del vórtice, puesto que tales errores pueden resultar en raíces con parte real positiva o negativa, que presentarían al equilibrio como un punto espiral inestable o estable.

a.2.2. Sistema lineal autónomo de n ecuaciones.

Sea el sistema lineal

$$x' = A.x + g(t),$$

presentado en el sub-apartado b.1. de la sección A. de este capítulo.

Se dice que el equilibrio de este sistema es *globalmente estable* si todos los eigenvalores de A son negativos. Si todos son positivos, el equilibrio es *globalmente inestable*. Para determinar si el sistema es asintóticamente estable, puede utilizarse el método propuesto por el **teorema de Routh-Hurwitz**, mencionado en la sección E. del **Capítulo III**.

Un sistema no autónomo de n ecuaciones puede convertirse en un sistema autónomo de $n + 1$ ecuaciones, haciendo $t = x_{n+1}$ donde t aparezca explícitamente y agregando la ecuación $x'_{n+1} = 1$.

b. Método directo de Liapounov.

El método de Liapounov permite estimar la extensión de la región de estabilidad asintótica del punto de equilibrio *sin resolver* el sistema, por medio de una función auxiliar V construida.

Puesto que este método es una generalización de los principios físicos de los sistemas conservativos, no intentaremos exponer su origen. Partimos, pues, de sus supuestos, aplicados a un sistema autónomo de dos ecuaciones

$$x' = F(x, y) \quad \text{y} \quad y' = G(x, y),$$

cuyo punto de equilibrio, dado por el par $(0, 0)$, está contenido en un dominio D (*).

Sea la función $V = V(x, y)$, llamada de *Liapounov*, una función continua de R^2 en R , con derivadas parciales continuas y

(*) Establecer que el punto de equilibrio se encuentra en $(0, 0)$ no impone pérdida de generalidad, puesto que siempre puede hacerse un cambio de variables que traslade un punto de equilibrio cualquiera al origen de un sistema de coordenadas apropiado. Ver Anton, 1989, págs. 120-121.

definida positiva en el dominio D , lo que implica que $V > 0$ para todo par (x, y) que no sea $(0, 0)$, donde $V = 0$.

Sea su derivada total con respecto a t

$$\frac{dV[f(t), g(t)]}{dt} = V_x[f(t), g(t)] \cdot \frac{df(t)}{dt} + V_y[f(t), g(t)] \cdot \frac{dg(t)}{dt},$$

que, en vista del sistema, puede escribirse como

$$V(x, y)' = V_x(x, y) \cdot F(x, y) + V_y(x, y) \cdot G(x, y).$$

De la definición de $V(x, y)'$ con respecto a 0 dependen las condiciones sobre estabilidad a las cuales conduce el método.

i. Si $V(x, y)'$ es semidefinida negativa, esto es, si $V(x, y)' \leq 0$ y $V(0, 0)' = 0$, el punto de equilibrio es estable.

ii. Si $V(x, y)'$ es definida negativa, esto es, si $V(x, y)' < 0$ y $V(0, 0)' = 0$, el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

iii. Si $V(x, y)'$ es definida positiva, esto es, si $V(x, y)' > 0$ y $V(0, 0)' = 0$, el punto de equilibrio es inestable.

La demostración geométrica de las tres afirmaciones previas se basa principalmente sobre los conceptos de curvas de nivel y de gradiente de $V(x, y)$, a los cuales nos referiremos a medida que adelantemos en ella.

Puesto que $V(x, y)$ es una función de R^2 en R es un campo escalar, es decir, una función real de una variable vectorial, (x, y) . Como para todo cuerpo escalar definido de R^2 en R , pueden determinarse curvas de nivel para esta función sobre el plano xy , hallando el conjunto de todos los puntos (x, y) para los que

$V(x, y) = c$, donde c es un valor constante.

Por los supuestos sobre la función, para $c = 0$ la curva de nivel será el punto $(0, 0)$, y, para valores positivos cada vez mayores de c , las curvas serán cerradas y limitando áreas cada vez más amplias en xy , conteniendo siempre al punto $(0, 0)$.

Esto puede ejemplificarse suponiendo que la función $V(x, y)$ toma la forma

$$V(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2,$$

cuya curva de nivel puede dibujarse sobre xy si se conocen los puntos (x, y) que satisfacen

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 = c,$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y $c \geq 0$ son valores constantes.

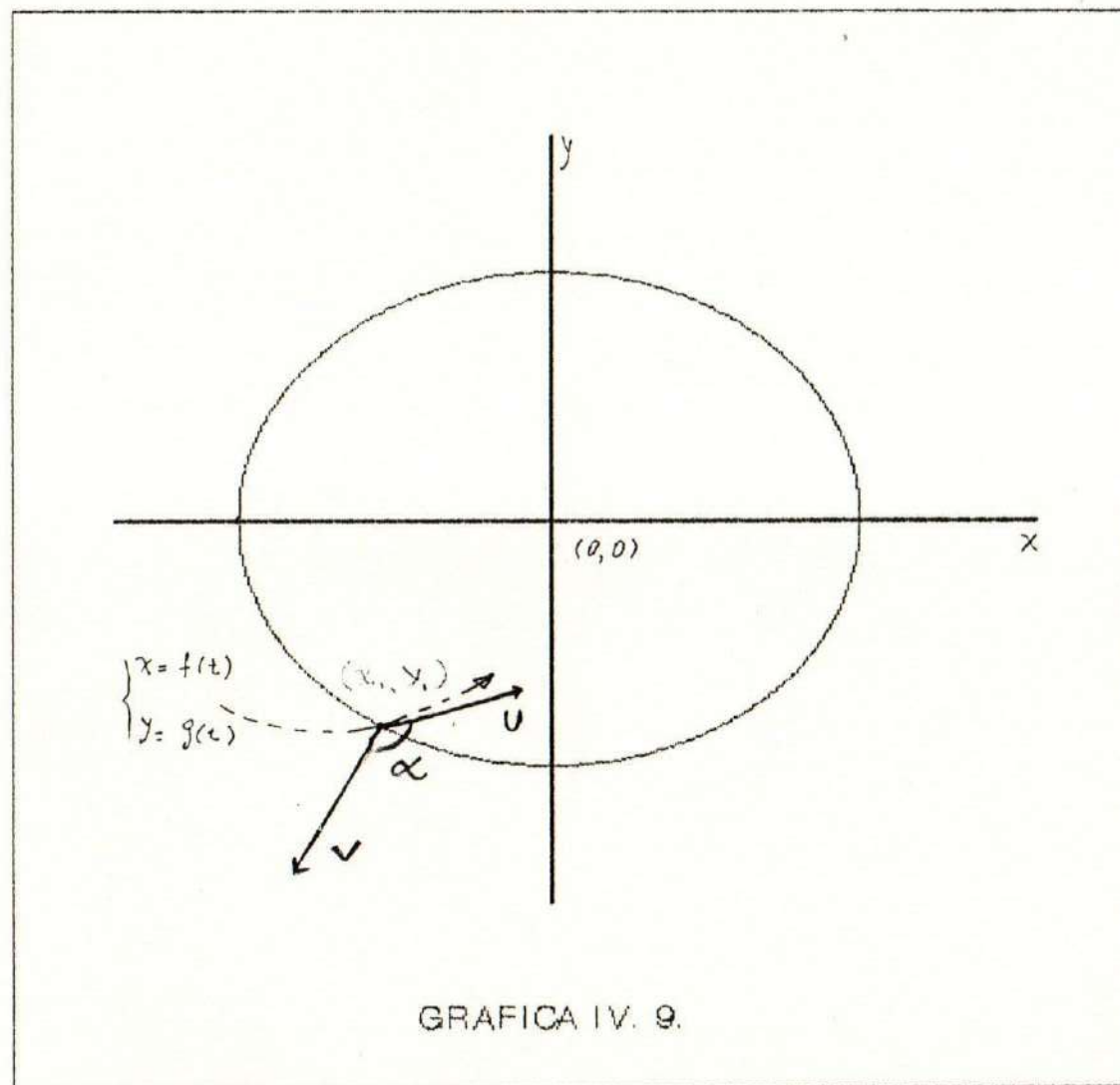
Puesto que ambos términos del primer miembro son positivos, $c = 0$ será satisfecho sólo cuando V se aplique sobre $(0, 0)$.

Si $c > 0$, puede reescribirse la curva de nivel dividiendo la expresión anterior entre c , de modo que tendremos

$$\frac{a}{c} \cdot x^2 + \frac{b}{c} \cdot y^2 = 1,$$

una ecuación cuya gráfica es una elipse con centro en $(0, 0)$. Sus ejes mayor y menor tomarán valores mayores cuanto mayor sea el valor seleccionado de c .

Como se dijo, esta forma para $V(x, y)$ es un ejemplo. La función de Liapounov no siempre existe, y, si existe, no siempre es una elipse. Para construirla no hay un procedimiento general, y tiene que recurrirse a tanteos. Sin embargo, a toda función $V(x, y)$ deben poder dibujarse curvas de nivel cerradas sobre xy que contengan al origen $(0, 0)$.



Supongamos que tal función existe, y que disponemos de una curva de nivel en xy (Gráfica IV. 9.). Supongamos que una trayectoria cualquiera, gráfica de la solución compuesta por las funciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, penetra en el área limitada por la curva de nivel, atravesándola por el punto (x_1, y_1) .

Sobre este punto pueden trazarse dos *vectores geométricos*. La demostración de i. ii y iii. depende del valor que tome el menor ángulo positivo entre ambos.

Uno de los vectores es u , tangente a la trayectoria definida por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en (x_1, y_1) , que puede escribirse como

$$u = [df(t_1)/dt].i + [dg(t_1)/dt].j.$$

El otro es el vector v , normal a la curva de nivel de $V(x, y)$ en el punto (x_1, y_1) . El vector con esta propiedad geométrica es llamado *gradiente* de V , un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de V en (x, y) (*). Evaluado en el punto (x_1, y_1) , el gradiente puede escribirse como

$$v = [V_x(x_1, y_1).i + V_y(x_1, y_1).j].$$

El *producto escalar* de los vectores v y u es la derivada total de $V(x, y)$ con respecto a t evaluada en (x_1, y_1) . Recordando (**) que

$$v \cdot u = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2,$$

donde v_k y u_k , $k = 1, 2$, son las componentes de v y u , se tiene que

$$v \cdot u = [V_x(x_1, y_1).i + V_y(x_1, y_1).j] \cdot \{[df(t_1)/dt].i + [dg(t_1)/dt].j\}$$

(*) Ver Apostol, Vol 2., 1980, págs. 316-318 y págs. 324-327.

(**) Ver Anton, 1989, págs. 126-128.

es equivalente a

$$V(x_1, y_1)' = V_x(x_1, y_1) \cdot \frac{df(t_1)}{dt} + V_y(x_1, y_1) \cdot \frac{dg(t_1)}{dt}$$

Recordemos, además, que, por la ley de los cosenos (*),

$$v \cdot u = \|v\| \cdot \|u\| \cdot \cos \alpha,$$

donde $\|v\|$ y $\|u\|$ son las *normas* o longitudes de los vectores v y u y α es el menor ángulo positivo entre ambos. Por tanto, también

$$V(x_1, y_1)' = v \cdot u = \|v\| \cdot \|u\| \cdot \cos \alpha.$$

Como las normas son siempre positivas, puesto que se obtienen para cada vector como la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son las componentes del vector, el signo de $V(x_1, y_1)'$ depende del coseno ángulo α . Sobre esta base se realiza la demostración geométrica de las tres afirmaciones del método de Liapounov.

i. Si $V(x_1, y_1)' \leq 0$, el $\cos \alpha$ debe ser negativo o nulo, por lo que el ángulo α debe ser uno entre 90° y 180° , inclusive. Por tanto, toda trayectoria que atraviere la curva de nivel, o comience dentro del área que limita, no saldrá de ella. Una trayectoria que, en el peor de los casos, no atraviere la curva, será tangente a ella, no alejándosele. El equilibrio $(0, 0)$ es estable en el dominio limitado por la curva de nivel.

ii. Si $V(x_1, y_1)' < 0$, el $\cos \alpha$ debe ser sólo negativo, por lo que el ángulo α debe ser uno entre 90° y 180° , sin incluir los extremos. Por ello, toda trayectoria que alcance la curva de nivel la atravesará, dirigiéndose al punto de equilibrio cuando t

(*) Ver Fleming y Varberg, 1991, págs. 410-412.

tienda a infinito. El punto es asintóticamente estable en el dominio limitado por la curva.

iii. Si $V(x_1, y_1)' > 0$, el $\cos \alpha$ debe ser sólo positivo, por lo que el ángulo debe ser uno entre 0° y 90° , sin incluir los extremos. En consecuencia, toda trayectoria que toque la curva de nivel se alejará del punto de equilibrio cuando t tome valores superiores al inicial. El punto es inestable.

El método de Liapounov puede utilizarse para determinar la estabilidad del equilibrio de una ecuación cuya solución sea una única función, $x = f(t)$, o para determinar la del correspondiente a un sistema de n ecuaciones. Para ello, la función $V(t)$ debe ser continua y derivable con respecto a t , debe anularse en el punto de equilibrio y ser definida positiva. Su derivada total con respecto a t debe ser definida negativa. No demostraremos estas afirmaciones.

Capítulo V.

ECUACIONES DIFERENCIALES EN MODELOS DE MICROECONOMIA DINAMICA.

a. Equilibrio y estabilidad dinámicos en un modelo de un mercado.

a.1. Cuando las funciones de demanda y oferta son lineales y dependen del precio.

a.1.1. Definiciones y supuestos básicos.

* Los agentes económicos, consumidores y productores, interactúan en un ambiente de competencia perfecta.

* El precio de mercado p asociado a cada cantidad Q del bien, es una función del tiempo t , derivable con respecto a t . Esta función puede escribirse como

$$p = p(t).$$

* Existe una relación inversa entre las cantidades del bien demandadas por los consumidores, Q_d , y sus precios, cuando t se mantiene constante. Esta relación puede expresarse como una función lineal, llamada *función de demanda*, de la forma

$$Q_d = D(p) = a.p + b,$$

donde $a < 0$ y $b > 0$ son constantes.

* Existe una relación directa entre las cantidades del bien ofrecidas por los productores, Q_s , y sus precios, cuando t se mantiene constante. Esta relación puede expresarse como una función lineal, llamada *función de oferta*, de la forma

$$Q_s = S(p) = A.p + B,$$

donde $A > 0$ y $B < 0$ son constantes.

* El mercado del bien, cuyos agentes se comportan según las relaciones determinadas previamente, se encuentra en equilibrio estático si $D(p) = S(p)$, cuando t se mantiene constante. El equilibrio se encuentra el punto (p_e, Q_e) , donde

$$p_e = (b - B)/(a - A) \quad \text{y} \quad Q_e = D(p_e) = S(p_e).$$

* Puede definirse una función lineal de la forma

$$E(p) = D(p) - S(p),$$

que, conocidas $D(p)$ y $S(p)$, escribimos como

$$E(p) = (a - A).p + (b - B),$$

llamada *función exceso de demanda*. El mercado del bien se encuentra en equilibrio estático si $E(p) = 0$, cuando t se mantiene constante.

* El equilibrio estático es estable si cumple con la *condición de estabilidad de Walras*, que postula la conducta de los agentes cuando $E(p) = 0$. Si $E(p) > 0$, los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor a los productores. Si $E(p) < 0$, los productores están dispuestos a aceptar un precio menor por el bien ofrecido. Por la definición de las funciones de demanda y oferta, el punto de equilibrio (p_e, Q_e) es *estáticamente estable*.

* Si la *condición de estabilidad de Walras* se mantiene cuando t es variable, la variación del precio p correspondiente a una variación infinitesimal de t puede escribirse como

$$p' = k.E(p),$$

donde $k > 0$ es un *coeficiente constante de ajuste*.

Dadas $D(p)$ y $S(p)$, podemos escribir la expresión anterior como

$$p' = k.(a - A).p + k.(b - B).$$

a.1.2. El equilibrio dinámico y su estabilidad.

La función

$$p' = k.(a - A).p + k.(b - B)$$

es una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, con coeficientes y término constantes, donde p es una función desconocida de t y p' es su primera derivada con respecto a t .

Su solución particular, dada la condición inicial $p(0) = p_0$, es de la forma

$$p = (p_0 - p_e) \cdot e^{k \cdot (a-A) \cdot t} + p_e,$$

donde $p_e = (b - B)/(a - A)$, como puede seguirse de lo expuesto en el apartado c. de la sección A. del Capítulo II.

Si $p_0 = p_e$, entonces $p = p_e$. El valor p_e es, pues, la solución constante de la ecuación diferencial, siendo el punto $(p_e, 0)$ su punto de equilibrio en el plano pp' . Este punto es asintóticamente estable, puesto que, siendo el exponente $k \cdot (a - A)$ negativo, cuando t tiende a infinito, p tiende a p_e .

El equilibrio dinámico del mercado es dado por el punto (p_e, Q_e) . Coincide con el punto de equilibrio estático.

a.2. Dos casos adicionales.

a.2.1. Ecuación diferencial lineal $p' = k \cdot E(p)$ para funciones de demanda y oferta no lineales.

Si $E(p)$ es una función no lineal, derivable con respecto a t , puede "linealizarse" por medio de una aproximación que involucre su primera derivada con respecto a p , de la forma

$$\frac{E(p) - E(p_e)}{p - p_e} \approx E'(p_e).$$

Cuando p tiende a p_e , la aproximación se hace igualdad. Por ello, se espera que la aproximación sea buena para valores de p cercanos al de p_e .

Si p_e es el precio de equilibrio, $E(p_e) = 0$. Despejando $E(p)$

de la expresión anterior, y sustituyéndola en

$$p' = k.E(p),$$

tenemos

$$p' = k.E'(p_e).(p - p_e),$$

una ecuación lineal **no homogénea** de primer orden, con coeficientes y término constantes.

a.2.2. Una aplicación del método de Liapounov, cuando la función de demanda es no lineal.

Sean las funciones

$$D(p) = b/p \quad \text{y} \quad S(p) = a,$$

donde $b > 0$ y $a > 0$ son constantes.

Para estas funciones,

$$E(p) = b/p - a \quad \text{y} \quad p_e = b/a.$$

Sustituyendo $E(p)$ en

$$p' = k.E(p),$$

tenemos

$$p' = k.(b/p - a),$$

una ecuación diferencial **no homogénea** no lineal.

La función de Liapounov, $V(p)$, que utilizaron los economistas para determinar el tipo de estabilidad, en el plano pp' , del punto de equilibrio $(p_e, 0)$ fue

$$V(p) = (p - p_e)^2.$$

La función $V(p)$ es derivable y *definida positiva*. Dependiendo de cómo se *defina* su derivada con respecto a t , se identifica el tipo de estabilidad del equilibrio.

Derivando, se tiene

$$V(p)' = 2.(p - p_e).p'.$$

Sustituyendo la función p' y el valor p_e , y reordenando términos, se tiene

$$V(p)' = -2.k.(a.p - b)^2/a.p.$$

Puesto que $V(p)' < 0$, es decir, $V(p)$ es *definida negativa*, el punto de equilibrio es *asintóticamente estable*.

b. Equilibrio y estabilidad en un modelo de multimercado.

b.1. Supuestos.

* La sociedad está compuesta por n individuos que cambian y consumen cantidades fijas $q_1, \dots, q_m$ de m bienes.

* El consumidor i -ésimo dispone, como dotación inicial, de la cantidad q_{ij}^0 del bien j -ésimo. La diferencia entre la cantidad de la cual dispone y la que consume, q_{ij} , puede escribirse como

$$E_{ij} = q_{ij} - q_{ij}^0,$$

donde E_{ij} es llamada *función exceso de demanda del bien j -ésimo por el i -ésimo consumidor*. El signo de E_{ij} no puede determinarse *a priori*, puesto que el consumidor puede tanto vender ($E_{ij} < 0$) como comprar ($E_{ij} > 0$) el bien j -ésimo a los precios de mercado.

* La renta del i -ésimo consumidor, y_i , es igual al valor de su dotación inicial

$$y_i = \sum_{j=1}^m p_j \cdot q_{ij}^0.$$

donde p_j es el precio del j -ésimo bien. Dicho precio es una función del tiempo t , derivable con respecto a t , tal que $p_j = p_j(t)$. En cuanto resta del sub-apartado b.1., no se consi-

derarán variaciones de t .

Toda la renta se gasta en bienes comprados para consumo

$$Y_i = \sum_{j=1}^m p_j \cdot q_{ij}$$

Por tanto, puede escribirse la ecuación de balance del i -consumidor igualando ambas expresiones. Esta ecuación no es una condición de equilibrio, sino una identidad que establece que el consumidor gastará toda su renta adquiriendo bienes. Restando al gasto la renta, podemos escribir, en términos de sus j funciones de exceso

$$\sum_{j=1}^m p_j \cdot (q_{ij} - q_{ij}^0) = \sum_{j=1}^m p_j \cdot E_{ij} = 0.$$

* Puede probarse, lo que no haremos, que cada función de exceso de demanda puede formularse como una función homogénea de grado cero, dependiente de los m precios de los bienes que se consumen en la sociedad hipotética. Esto implica que es posible escribir tal función como sigue

$$E_{ij} = E_{ij}(p_1, \dots, p_m),$$

donde $j = 1, \dots, m$, y que, si varían todos los precios en las mismas proporción y dirección, los excesos se mantienen inalterados.

* La función de exceso de demanda agregada del bien j -ésimo, E_j , se obtiene sumando las n funciones de los n consumidores, de modo que

$$E_j = \sum_{i=1}^n E_{ij}(p_1, \dots, p_j, \dots, p_m) = E_j(p_1, \dots, p_j, \dots, p_m).$$

Puede definirse una forma agregada de la ecuación de balance, dada por la suma de las ecuaciones de los n consumidores. Por tanto, sería

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_j \cdot E_{ij} = \sum_{j=1}^m p_j \cdot E_j = 0.$$

Esta identidad es llamada *ley de Walras*.

* El precio de equilibrio del mercado del j -ésimo bien es aquél que, dados los $m-1$ precios restantes, hace $E_j = 0$. Por tanto, si se considera el sistema de condiciones de equilibrio para los m mercados, dado por

$$E_1(p_1, \dots, p_j, \dots, p_m) = 0$$

$$E_j(p_1, \dots, p_j, \dots, p_m) = 0$$

$$E_m(p_1, \dots, p_j, \dots, p_m) = 0,$$

donde los m precios absolutos son variables, sólo se encontrarán $m-1$ ecuaciones independientes.

La consecuencia inmediata de esto es la imposibilidad de hallar una única solución al sistema propuesto. Esta dificultad puede superarse dividiendo todos los precios entre uno de ellos, con lo que el número de variables se reduce a $m-1$. Omitiendo cualquiera de las m ecuaciones, disponemos de un sistema de $m-1$ variables y $m-1$ ecuaciones, que supondremos consistente.

Si dividimos todos los precios entre p_1 , y eliminamos la primera ecuación, el sistema puede escribirse como

$$E_j(1, p_2/p_1, \dots, p_m/p_1) = 0,$$

donde $j = 2, \dots, m$. Cada función de exceso se ha expresado dependiente de $m-1$ precios *relativos*. El bien 1, cuyo precio se tomó como referencia, es llamado *numeralio*.

Si, para simplificar, hacemos $p_1 = 1$, podemos escribir

$$E_j(p_2, \dots, p_m) = 0.$$

b.2. El equilibrio dinámico y su estabilidad.

Puesto que $p_j = p_j(t)$ es derivable con respecto a t , y toda derivada es una función, puede escribirse

$$p_j' = k_j \cdot E_j(p_2, \dots, p_m),$$

donde $j = 2, \dots, m$, generalizando la condición de estabilidad de Walras, presentada en el sub-apartado a.1.1. para el análisis de un mercado de un bien. Para simplificar la expresión, se supone que los bienes se miden en unidades tales que se cumple $k_j = 1$ para toda j .

Se determina la forma de E_j de manera indirecta. Tomando su diferencial total, se tiene que

$$dE_j = \sum_{k=2}^m \frac{\partial E_j}{\partial p_k} \cdot dp_k.$$

Sabiendo que

$$dE_j \approx E_j - E_{je} \quad \text{y} \quad dp_k \approx p_k - p_{ke},$$

puede escribirse la aproximación

$$E_j = \sum_{k=2}^m \frac{\partial E_j}{\partial p_k} \cdot (p_k - p_{ke}),$$

puesto que $E_{je} = 0$. Suponiendo constantes las derivadas parciales, que denotaremos como a_{jk} , y sustituyendo la expresión anterior en $p_j' = E_j(p_2, \dots, p_m)$, tendremos

$$p_j' = a_{j2} \cdot p_2 + \dots + a_{jm} \cdot p_m + g_j,$$

donde

$$g_j = \sum_{k=2}^m a_{jk} \cdot p_{ke}$$

siendo $j = 2, \dots, m$; $k = 2, \dots, m$.

El conjunto de las $m-1$ ecuaciones de esta forma constituye un sistema **no homogéneo** de ecuaciones diferenciales lineales de primer grado con coeficientes y términos constantes.

En notación matricial, podemos reconocerlo en la expresión

$$p' = A \cdot p + g.$$

Si suponemos que la matriz de coeficientes A es diagonalizable, este sistema puede resolverse utilizando el método expuesto en el sub-apartado b.1. de la sección A. del **Capítulo IV**. Para ello, los $m-1$ eigenvectores correspondientes a los $m-1$ eigenvalores de A deben ser linealmente independientes. Supondremos que esto ocurre, y, además, que ningún eigenvalor está repetido.

Los eigenvectores pueden escribirse como vectores columnas de la matriz inversible V , que diagonaliza la matriz A convir-

tiendo el sistema original de ecuaciones *ligadas* en un sistema auxiliar de ecuaciones *no ligadas*, **no homogéneas**, de primer orden y con coeficientes y términos constantes. La solución de cada ecuación, por el método presentado en el sub-apartado c. de la sección A. del **Capítulo II**, y el retorno al sistema original, expuesto en el sub-apartado b.1. de la sección A. del **Capítulo IV**, nos conduce, para cada j -ésima fila del vector solución general p , a

$$p_j = c_{j2} \cdot e^{r_2 \cdot t} + \dots + c_{jm} \cdot e^{r_m \cdot t} + z_j,$$

donde c_{jk} son coeficientes constantes que dependen de las condiciones iniciales y r_k son los eigenvalores de A , siendo $j = 2, \dots, m$. Los primeros $m - 1$ términos del segundo miembro son parte de la solución general del sistema **homogéneo** asociado. Puesto que la j -ésima fila proviene de la solución general del sistema **no homogéneo**, se afirma que los términos constantes z_j son elementos del vector solución particular del sistema **no homogéneo**.

Ilustraremos estos resultados suponiendo que en la sociedad se consumen sólo tres bienes, 1, 2 y 3, siendo 1 el numerario.

Sea el sistema

$$p_2' = a_{22} \cdot p_2 + a_{23} \cdot p_3 + g_2$$

$$p_3' = a_{32} \cdot p_2 + a_{33} \cdot p_3 + g_3,$$

donde $g_j = a_{j2} \cdot p_{2e} + a_{j3} \cdot p_{3e}$, siendo $j = 2, 3$.

Podemos escribirle como

$$p' = A \cdot p + g.$$

Para resolver el sistema *diagonalizando* A necesitamos conocer los eigenvalores r_1 y r_2 de A , que colocaremos en la matriz

diagonal D , y sus eigenvectores correspondientes, v_2 y v_3 , que formarán la matriz V .

Haciendo el cambio de variable $p = V.y$, y despejando y' del sistema, tendremos

$$y' = (V^{-1}.A.V).y + V^{-1}.g,$$

o también

$$y' = D.y + h,$$

que podemos escribir como

$$\begin{bmatrix} y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & r_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

donde

$$h_2 = v_{22}^{-1}.g_2 + v_{23}^{-1}.g_3$$

$$h_3 = v_{32}^{-1}.g_2 + v_{33}^{-1}.g_3.$$

Este artificio a hecho posible definir un sistema de ecuaciones *desligadas* que pueden resolverse consecutivamente, de la forma

$$y_j' = r_j.y_j + h_j,$$

cuya solución *particular* es

$$y_j = (b_j + h_j/r_j).e^{r_j.t} - h_j/r_j,$$

cuando $y_j(0) = b_j$ y $j = 2, 3$.

El primer término de la función es una función exponencial con coeficiente constante, que llamaremos u_j , y el segundo es un término constante, que llamaremos w_j . Agrupándoles en vectores, podemos escribir

$$y = u - w.$$

Puesto que $x = V.y$, tenemos

$$x = V.(u - w) = V.u - V.w.$$

El primer término nos conduce a una combinación lineal de funciones exponenciales. Podemos denotar los coeficientes constantes por medio de c_{jk} . Este término contiene la solución *general* del sistema **homogéneo** asociado. El segundo término es un vector de términos constantes, cuyos elementos llamaremos z_j , y que pueden escribirse como

$$z_2 = v_{22} \cdot w_2 + v_{23} \cdot w_3$$

$$z_3 = v_{32} \cdot w_2 + v_{33} \cdot w_3.$$

En base a lo escrito, la solución *general* del sistema **no homogéneo** viene dada por las funciones

$$p_j = c_{j2} \cdot e^{r_2 \cdot t} + c_{j3} \cdot e^{r_3 \cdot t} + z_j,$$

donde $j = 2, 3$.

Retornemos al caso de m bienes, cuya solución es

$$p_j = c_{j2} \cdot e^{r_2 \cdot t} + \dots + c_{jm} \cdot e^{r_m \cdot t} + z_j,$$

donde $j = 2, \dots, m$.

Si las partes reales de los $m - 1$ eigenvalores fueran negativas, hecho que puede investigarse indirectamente aplicando el **teorema de Routh-Hurwitz**, expuesto en la sección E. del **Capítulo III**, los primeros $m - 1$ términos tenderían a 0 cuando t tienda a infinito. Por tanto, los términos z_j se considerarían valores de equilibrio *asintóticamente estable*.

Henderson y Quandt afirman en su Teoría Microeconómica que el término constante z_j es el precio de equilibrio p_{je} . Demostrar esto exige laboriosos manejos de las expresiones para z_j que permitan escribirlas en términos de p_{2e} y de p_{3e} . Cuando $j = 2$, el coeficiente del primer precio debe ser la unidad, y nulo el del segundo. Cuando $j = 3$, debe ocurrir lo contrario. Estas pruebas no se han hecho en este trabajo. Aceptaremos, sin embar-

go, cuanto fue escrito en el libro mencionado.

Siendo $z_j = p_{je}$, se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{jt} = p_{je}$$

por lo que puede afirmarse que el sistema tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en $(p_{2e}, \dots, p_{me})$.

El tipo de estabilidad del equilibrio del sistema puede determinarse también por medio del método de Liapounov. Para hacerlo, la función de Liapounov propuesta, $V(p_2, \dots, p_m)$, es la generalización de la presentada para el análisis del mercado de un único bien en el sub-apartado a.2 de esta sección. Se escribe como

$$(*) \quad V(p_2, \dots, p_m) = \sum_{j=1}^m (p_j - p_{je})^2.$$

cuya derivada total con respecto a t es

$$V(p_2, \dots, p_m)' = 2 \cdot \sum_{j=1}^m (p_j - p_{je}) \cdot p_j'$$

o, sustituyendo p_j' por su expresión correspondiente,

$$V(p_2, \dots, p_m)' = 2 \cdot \sum_{j=1}^m (p_j - p_{je}) \cdot E_j.$$

(*) Nótese que si el sistema se define para dos bienes y el numerario, puede representarse en un plano fase $p_2 p_3$. Si se trasladan los ejes del plano de manera que su origen coincida con el punto de equilibrio (p_{2e}, p_{3e}) , la función de Liapounov tiene círculos como curvas de nivel, siendo del tipo de las presentadas en el apartado b. de la sección B. del Capítulo IV.

La ley de Walras, anotada en el sub-apartado anterior, permite escribir esta derivada como

$$V(p_2, \dots, p_m)' = -2 \cdot \sum_{j=1}^m p_{je} \cdot E_j$$

Si el sistema satisface el axioma débil de la preferencia revelada a nivel agregado, la derivada de la función es definida negativa, por lo cual el equilibrio es asintóticamente estable.

Para exponer las razones de esto, hay que explicar el axioma débil a nivel del consumidor. Este axioma exige consistencia en las decisiones de compra de cada consumidor. Así, si al conjunto de precios $p^0 = p_1^0, \dots, p_m^0$, el consumidor adquiere la cesta de bienes $q^0 = q_1^0, \dots, q_m^0$, pudiendo adquirir la cesta q^1 más barata o al mismo precio, no adquirirá la cesta q^1 sino cuando el conjunto de precios p^1 encarezca la cesta preferida q^0 , colocando su valor por encima del de la cesta alternativa y de la renta del consumidor. Esto puede escribirse sintéticamente como

$$p^0 \cdot q^1 \leq p^0 \cdot q^0 \quad \text{implica} \quad p^1 \cdot q^0 > p^1 \cdot q^1,$$

siendo el segundo miembro de cada expresión el valor de la cesta efectivamente adquirida por el consumidor en cada caso.

A nivel agregado, el axioma débil puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^m p_j \cdot E_{je} \leq \sum_{j=1}^m p_j \cdot E_j \quad \text{implica} \quad \sum_{j=1}^m p_{je} \cdot E_j > \sum_{j=1}^m p_{je} \cdot E_{je}$$

Ambos lados de la primera expresión son nulos, el izquierdo por $E_{je} = 0$ para todo j y el derecho por la ley de Walras. Puesto

que el miembro derecho de la segunda expresión también es nulo,
 el izquierdo es mayor que 0 . por ello,

$$V(p_2, \dots, p_m)' = -2 \sum_{j=1}^m p_{je} \cdot E_j.$$

es definida negativa y el equilibrio en $(p_{2e}, \dots, p_{me})$ es
 asintóticamente estable.

Capítulo VI.

ECUACIONES DIFERENCIALES EN MODELOS DE MACROECONOMIA DINAMICA.

A. Relación entre inflación y desempleo en un modelo con expectativas adaptativas.

a. Definiciones y supuestos básicos.

* Se llama *tasa instantánea de crecimiento de una función del tiempo*, $F = F(t)$, a la razón $f = F'/F$. La expresión F' , llamada *tasa de variación*, es la derivada de F con respecto a t . La *tasa de crecimiento* es, pues, la *tasa de variación* expresada en términos de la función. Por ser una razón de funciones, es una función. Es frecuente expresarla como la derivada del logaritmo de una función del tiempo (*).

En esta sección se relacionarán tres *tasas de crecimiento*, siendo ellas $w = W'/W$, $p = P'/P$ y $m = M'/M$. La primera corresponde al *índice de salarios nominales*, W , la segunda al *índice de precios*, P , y la tercera al *nivel de saldos monetarios nominales*, M , todos ellos variables escritas en función del tiempo, t .

Puede probarse que las tasas m y p están relacionadas de modo que

$$(M/P)' / (M/P) = m - p,$$

donde (M/P) es el *nivel de saldos monetarios reales* (*).

* Se define como *tasa de desempleo* la razón $U = (\bar{N} - N)/\bar{N}$, donde $\bar{N}$ es el *nivel de empleo de pleno empleo* y N es el *nivel de empleo efectivo*. Supondremos en lo sucesivo que $N = N(t)$, por lo que $U = U(t)$. Además, supondremos que U es derivable con respecto

(*) Ver Anexo al Capítulo VI.

a $\dot{t}$.

* Se supone que la *tasa de crecimiento del nivel de precios*, p , que llamaremos *tasa de inflación efectiva*, es idéntica a la *tasa de crecimiento de los salarios*, w , si no hay mejoras en la productividad de los trabajadores. Si los incrementos en la productividad, no explicados por el modelo, pueden medirse mediante un indicador T , podemos escribir

$$p = w - T.$$

* Se supone que la *tasa de crecimiento de los salarios*, w , se hace mayor cuanto menor sea la *tasa de desempleo*, U , y mayor la *tasa de inflación esperada*, que llamaremos p^e . Esta variable también es función del tiempo, t . Utilizando una forma lineal, podemos escribir

$$w = a - b.U + h.p^e.$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Se establece que $0 < h \leq 1$ para significar que, aunque la variable p^e siempre es relevante, nunca afecta a la tasa w por encima de su propio valor.

En base a los supuestos propuestos en los dos últimos puntos, escribimos

$$p = a - b.U + h.p^e - T.$$

* La estimación del valor de la *tasa de inflación esperada*, p^e , se hace en base a las expectativas de los trabajadores. Si sus expectativas son *adaptativas*, esto es, si se forman considerando que el valor de p^e en el instante t será un valor entre el *efectivo* y el *esperado* para el instante anterior, puede escribirse la derivada de la función con respecto a t como

$$p^{e \cdot} = j.(p - p^e),$$

donde $0 < j \leq 1$. Esta restricción indica que la variación de la función p^e correspondiente a una variación infinitesimal de t es una fracción de la diferencia entre las funciones p y p^e .

* Se supone que la tasa de crecimiento de los saldos nominales es una variable de política económica. Por tanto, su valor es decidido por la autoridad monetaria. Mantendremos constante su valor.

* Se supone que la tasa de variación de la tasa de desempleo, U' , depende de la tasa de crecimiento de los saldos reales, $(M/P)'/(M/P)$. Cuando dicha tasa es positiva, la tasa de desempleo se reduce con el tiempo. Cuando es negativa ocurre lo contrario. Si es nula, la tasa de desempleo se mantiene invariable. Esto puede escribirse como

$$U' = -k.(m - p),$$

donde $k > 0$.

b. Equilibrio y estabilidad en el modelo.

Las ecuaciones que definen el modelo son

$$(1) \quad p = a - b.U + h.p^e - T,$$

$$(2) \quad p^{e'} = j.(p - p^e),$$

$$(3) \quad U' = -k.(m - p).$$

Eliminando dos de tres variables, puede expresarse el sistema como una ecuación diferencial de una variable. Eliminemos p y U .

Sustituyendo (1) en (2), podemos escribir

$$(4) \quad p^{e'} = j.(a - b.U - T) - j.(1 - h).p^e.$$

Para poder sustituir (3) en (4), derivamos (4) con respecto a t , obteniendo una expresión que contiene a U' , de la forma

$$(5) \quad p^{e''} = -j.b.U' - j.(1-h).p^{e'}.$$

Sustituyendo (4) en (5), tenemos

$$(6) \quad p^{e''} = j.b.k.m - j.b.k.p - j.(1-h).p^{e'}.$$

Para eliminar la función p de (6), la despejamos de (2), obteniendo

$$p = (1/j).p^{e'} + p^e,$$

que, introducida en (6), resulta en

$$p^{e''} + [b.k + j.(1-h)].p^{e'} + (j.b.k).p^e = j.b.k.m.$$

Esta expresión es una ecuación diferencial **no homogénea** de segundo orden, con coeficientes y términos constantes, de la forma

$$p^{e''} + a_1.p^{e'} + a_2.p^e = g,$$

donde $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ y $g > 0$.

Para hallar su solución *general* debemos recurrir a los apartados c. de la sección C. del Capítulo III, y a. de la sección D. del mismo capítulo. En estos apartados se expuso que tal solución, p^e , sería

$$p^e = p^e_c + p^e_p,$$

donde p^e_c es la solución *general* de la ecuación **homogénea** asociada y p^e_p es una solución *particular* de la ecuación **no homogénea**.

Para hallar p^e_p , aplicamos el **método de coeficientes indeterminados** para el Caso 1. Puesto que podemos identificar la forma de la función g como un polinomio de grado 0, proponemos que p^e es una función constante. Sustituyendo en la ecuación,

$$p^e_p = g/a_2 = m.$$

Para hallar p^e_c , necesitamos hallar las raíces del polinomio

$$r^2 + r.a_1 + a_2 = 0,$$

lo que podemos hacer usando la función cuadrática

$$r_1, r_2 = (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4.a_2}).$$

Sin importar si son reales o imaginarias, o si se repiten, las partes reales de ambas raíces son negativas, por lo que la solución constante $p^e = m$ es un valor de equilibrio asintóticamente estable. Esto puede verificarse observando que el valor absoluto del discriminante, cuando es real, nunca es mayor que el del coeficiente a_1 .

Sustituyendo las funciones p^e y $p^{e'}$ en la función (2), puede conocerse la función p . Sustituyendo p^e y p en (1), puede obtenerse la función U .

c. Observaciones a la política económica.

De un modelo como el presentado se sigue que las tasas de inflación esperada y efectiva tenderán al valor de la tasa de crecimiento de los saldos monetarios nominales, m , cuando t tiende a infinito. Puesto que m es una variable de política, la autoridad monetaria decide las tasas de inflación cuando decide el valor de m .

Dependiendo de los supuestos que se hagan sobre la magnitud del efecto de p^e sobre la tasa w , y por tanto, sobre la tasa p , puede llegarse a dos conclusiones diferentes sobre el valor de equilibrio al cual tiende U . Si $h = 1$ en (1), el valor de equilibrio para U cuando t tiende a infinito no depende de m , por lo que la política monetaria basada en expansión monetaria fracasa en el largo plazo. Si $1 > h > 0$, por el contrario, dicho valor puede depender de m . No se ofrece demostración.

B. Relación entre el mercado de bienes de capital y el mercado de dinero en un modelo con expectativas racionales y previsión perfecta.

a. Supuestos.

* Los agentes económicos conocen las relaciones económicas que *determinan* el desenvolvimiento de la economía, y disponen de la información necesaria para tomar decisiones óptimas en todo momento del tiempo. La información *pasada* es útil sólo en cuanto permita *predecir racionalmente* el comportamiento de las variables económicas relevantes. Si la *previsión* del futuro es *perfecta*, las expectativas *ex ante* sobre el comportamiento de las variables se corroboran *siempre* en sus realizaciones *ex post*. En modelos que incluyen incertidumbre, las expectativas deben ser correctas *en promedio*, para que los agentes no revisen su mecanismo de formación de expectativas.

* Con respecto al mercado de bienes, suponemos que pueden definirse las curvas de *demanda y oferta agregadas* como

$$(1) \quad Y = c.Y + K' + d.K$$

$$(2) \quad Y = a_0 + a_1.K,$$

donde $1 > c > 0$, $d > 0$, $a_0 > 0$ y $a_1 > 0$.

Para (1), Y es la renta nacional, $c.Y$ el gasto de consumo, c la propensión marginal a consumir, K el capital social acumulado, K' el gasto en inversión neta, escrito como derivada de K con respecto a t , $d.K$ el gasto en inversión para reposición de capital y d la tasa de depreciación del capital.

Para (2), Y es la producción real, y a_1 el producto marginal de K .

* Con respecto al mercado de dinero, suponemos que pueden definirse las funciones de *demanda de saldos reales* y de *tasa de interés real* como

$$(3) \quad M/P = b_1 \cdot Y - b_2 \cdot r$$

$$(4) \quad r = a_1 + p^e,$$

donde $b_1 > 0$ y $b_2 > 0$.

Para (3) y (4), r , es la tasa de interés *NOMINAL*.

Para (4), p^e es la tasa de inflación *perfectamente prevista*.

b. Equilibrio y estabilidad del modelo.

Si se supone equilibrio en el mercado de bienes, pueden igualarse (1) y (2). Despejando K' , podemos escribir

$$(5) \quad K' = a_0 \cdot (1 - c) + [a_1 \cdot (1 - c) - d] \cdot K.$$

Si se supone equilibrio en el mercado monetario, pueden sustituirse (2) y (4) en (3), obteniendo

$$(6) \quad M/P = (b_1 \cdot a_0 - b_2 \cdot a_1) + b_1 \cdot a_1 \cdot K - b_2 \cdot p^e.$$

Puede probarse (*) que

$$(7) \quad (M/P)' / (M/P) = m - p^e,$$

donde m , la *tasa de crecimiento instantáneo de los saldos monetarios nominales*, es una variable de política económica cuyo valor es *decidido* por la autoridad monetaria. Le mantendremos constante.

En base a las ecuaciones (5), (6) y (7) podemos construir un **diagrama de fase** para un sistema autónomo de dos ecuaciones diferenciales lineales, similares a los expuestos en el apartado **a.** de la sección B. del **Capítulo IV**, siendo las funciones deriva-

(*) Ver Anexo al Capítulo VI.

das K' y $(M/P)'$.

Sabemos que el punto de equilibrio del sistema es dado por $[K_e, (M/P)_e]$, punto donde, simultáneamente, $K' = 0$ y $(M/P)' = 0$. Para hallar dicho punto, definiremos dos funciones, sobre K' , (5) y (M/P) , (6), tales que podamos dibujar sobre el plano fase $K(M/P)$ dos curvas cuyos elementos tengan una tasa de variación nula con respecto al tiempo.

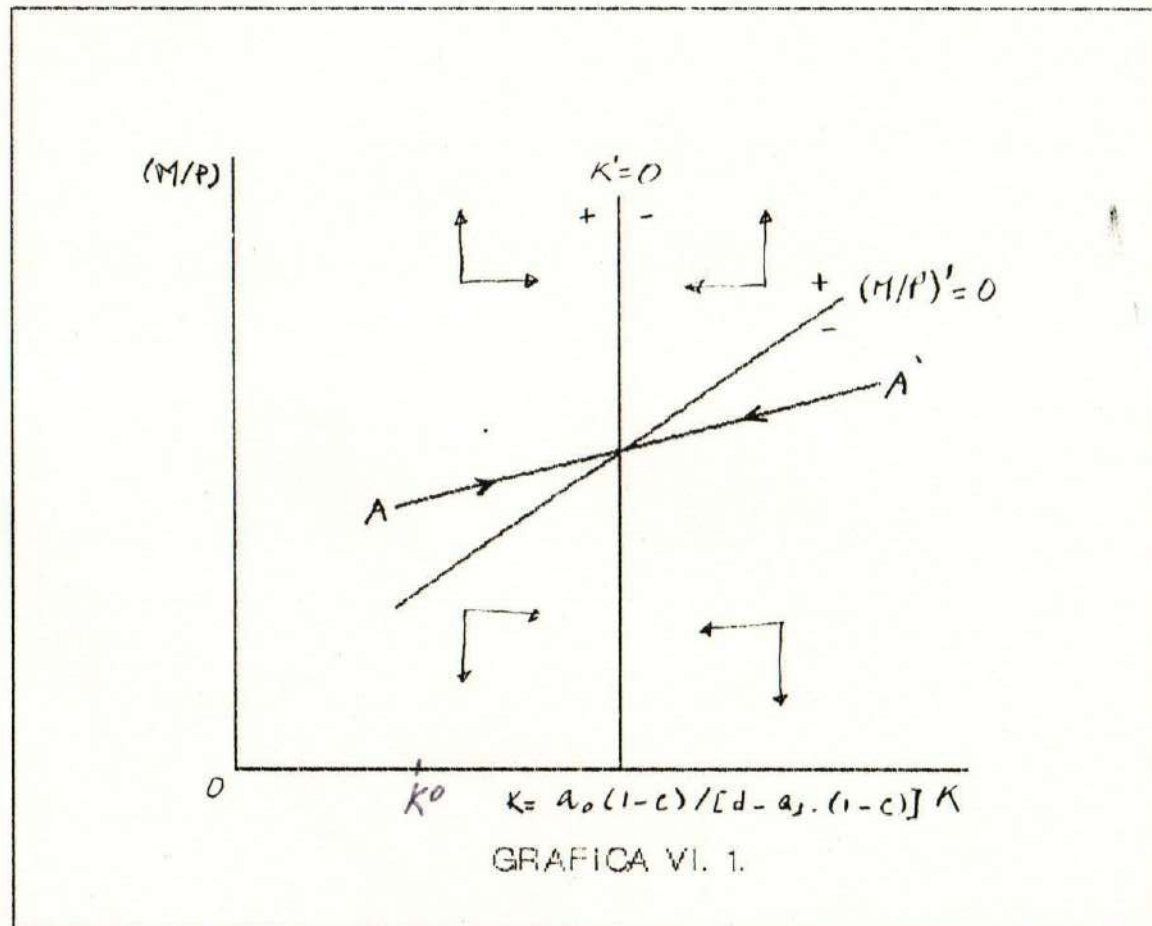
Primero, haremos $K' = 0$ en (5). Despejando K , tendremos

$$(8) \quad K = \frac{a_0 \cdot (1 - c)}{d - a_1 \cdot (1 - c)},$$

donde, siendo $a_0 > 0$ y $(1 - c) > 0$, debe cumplirse $d > a_1 \cdot (1 - c)$ para asegurar que $K > 0$.

Esta función se grafica como una línea vertical en el plano fase (Gráfica VI. 1.). Puesto que su denominador debe ser positivo, la derivada de K' con respecto a K en (5) es negativa. Siendo así, pueden dibujarse dos flechas horizontales que apunten a la curva $K' = 0$ desde los dos semiplanos que define.

Esto puede explicarse en términos económicos de la siguiente manera. Supongamos que el nivel de saldos reales se mantiene constante, porque Y y r no se alteran en (3). Si aumenta el nivel de capital en (1), aumentará el nivel de inversión para reposición. Permaneciendo constante Y , debe reducirse el nivel de inversión neta para vaciar el mercado. Este concepto es un nivel para cada instante, pero, al considerar el tiempo continuo, puede expresarse como K' , esto es, el flujo que incrementa o decrementa el nivel del capital cuando no es $K' = 0$. El nivel de capital puede considerarse una acumulación de flujos de inversión.



La segunda curva en el plano fase la hallamos indirectamente. Sabemos, por (7), que $(M/P)' = 0$ cuando $m = p^e$. Por tanto, haciendo la sustitución apropiada en (6), tendremos

$$(9) \quad M/P = (b_1 \cdot a_0 - b_2 \cdot a_1) + b_1 \cdot a_1 \cdot K - b_2 \cdot m.$$

Esta función puede representarse en el plano fase como una recta de pendiente positiva, dado que $b_1 > 0$ y $a_1 > 0$ (Gráfica VI. 1.).

Puesto que no disponemos de la ecuación diferencial en este caso, hallamos la dirección de las flechas verticales indirectamente. Hemos establecido que sólo cuando $m = p^e$, $(M/P)' = 0$, y hemos escrito esta condición por medio de la función (9). En todos los otros puntos del plano fase, la función pertinente es

$$(6) \quad M/P = (b_1 \cdot a_0 - b_2 \cdot a_1) + b_1 \cdot a_1 \cdot K - b_2 \cdot p^e.$$

Supongamos que mantenemos constante el *nivel* de saldos nominales, M . Si incrementamos el *nivel* de capital, K , manteniendo la condición de vaciado del mercado, debe aumentar la tasa de inflación, p^e . Cuando esto ocurre, el *nivel* de precios, P , toma valores continuamente mayores con el tiempo. En consecuencia, como (M/P) se hace menor a la derecha de la recta $(M/P)' = 0$, puede afirmarse que en dicho semiplano $(M/P)' < 0$. En base a esto, concluimos, indirectamente, que la derivada de $(M/P)'$ con respecto a (M/P) es *positiva*, y que las flechas verticales en ambos semiplanos no apuntan hacia la recta $(M/P)' = 0$.

Observando el diagrama de fase en conjunto, podemos identificar al punto de equilibrio como un *punto de silla*, siendo el par de trayectorias convergentes representado por la recta AA' .

c. Observaciones a la política económica.

Que exista un único par de trayectorias convergentes en el plano fase parece muy conveniente a D. Begg, según expone en el libro La revolución de las expectativas racionales en la macroeconomía. Dicho autor afirma que, *dado un nivel inicial de capital, K_0 (Gráfica VI. 1.), la economía puede seguir una única trayectoria hacia el punto de equilibrio $[K_e, (M/P)_e]$, lo que confiere "estabilidad" económica al sistema. Si el punto fuera un *nodo estable*, o un *foco estable*, cualquier trayectoria podría conducir al equilibrio, por lo cual, en cualquier momento del tiempo, los agentes podrían cambiar de trayectorias en el plano fase, dando saltos *discretos* de una a otra. Si esto ocurre cuando el equilibrio es un *punto de silla*, cualquier trayectoria escogida alejará a la economía del equilibrio, obligando a los agentes a retornar a la trayectoria AA' .*

Reconoce, sin embargo, una posible inconveniencia en equilibrios de la forma del *punto de silla*. Si todos los agentes disponen de conocimientos e información iguales, no hay incentivos para abandonar AA' . Pero, si un conjunto de agentes, mejor informado, cree poder alcanzar beneficios durante algún tiempo sobre una trayectoria no convergente, puede promover el abandono de AA' . El conjunto menos informado, al no advertir el perjuicio que tal medida le causaría, puede aceptar una trayectoria diferente hasta que sea notorio que no converge hacia $[K_e, (M/P)_e]$.

Tres observaciones adicionales pueden hacerse.

i. Si la autoridad monetaria *decide* incrementar el *nivel* de saldos nominales de M_1 a M_2 , para disminuir el desempleo, los agentes, que suponemos igualmente informados, *sabrán* que el *nivel*

de precios aumentará de modo que $(M/P)_1 = (M/P)_2$. En consecuencia, puesto que los valores relativos no cambian, el diagrama de fase se mantiene inalterado.

ii. Si la autoridad monetaria decide incrementar la tasa m , de m_1 a m_2 , los agentes sabrán que la tasa de inflación se incrementará de modo que $p^e_2 = m_2$. Sustituyendo este nuevo valor en (9), podremos constatar que, para cada valor K , el valor de (M/P) debe ser menor. Esto, en el plano fase, se representa con un desplazamiento hacia abajo de la función $(M/P)' = 0$. Como todo lo demás se mantiene igual, el punto de equilibrio continúa siendo un punto de silla y las variables reales no se alteran.

iii. Si la autoridad monetaria decide mantener constante la tasa de interés nominal, r , la función $(M/P)' = 0$ será de la forma

$$(10) \quad M/P = (b_1 \cdot a_0 - b_2 \cdot a_1) + b_1 \cdot a_1 \cdot K - b_2 \cdot r,$$

obtenida de sustituir (4) en (6).

Para mantener constante el valor de r , dado K , la autoridad monetaria debe saber el nivel de precios que suponen los agentes, de modo que pueda suministrar la cantidad de M que mantenga constante la razón (M/P) . Los agentes saben esto, por lo que dudan continuamente sobre la veracidad de sus expectativas acerca de la tasa de inflación. Por ello, la selección de r introduce "inestabilidad" económica en el modelo.

----- 0 -----

En base a estas tres observaciones, los nuevos economistas clásicos afirman que la política monetaria no afecta las variables reales de la economía.

C. Un modelo dinámico con expectativas racionales para la inversión.

a. Supuestos y definiciones.

* Supondremos que el sector productivo en una economía se divide en dos conjuntos, uno de *productores de bienes de consumo*, PC , y otro de *productores de bienes de capital*, PK , que venden sus productos en el momento t a los *precios de equilibrio* p_t y q_t .

Supondremos que los PC compran toda su producción a los PK , y la utilizan para mantener su nivel de capital o aumentarlo, es decir, como *inversión para reposición de capital*, $d_1 \cdot K_t$ o como *inversión neta*, K_t' . Esto puede escribirse como

$$(1) \quad I_t = d_1 \cdot K_t + K_t',$$

donde d_1 es la tasa de depreciación del capital y K_t' es la derivada del capital *producido* en el momento t , K_t , con respecto a t . Nótese que, para suponer esto último, tuvimos que postular que $K_t = K_t(t)$.

Supondremos además que el índice de precios p_t es constante.

* Los PC maximizan como *empresas individuales* su beneficio cuando el ingreso marginal de una unidad de capital adicional iguala su costo marginal.

Supondremos que los PC toman sus decisiones de inversión considerando las variaciones *futuras* en el precio de los *nuevos* bienes de capital, K_t , y que las proporciones de uso del capital pueden variarse luego de instalado (tecnología moldeable-moldeable). Estos supuestos nos permiten escribir la relación de *beneficio marginal nulo* en el periodo t como

$$q_t' + p_t \cdot Pmq_{kt} = (d_1 + d_2) \cdot q_t,$$

La derivada q_t' indica la *ganancia por unidad de capital* adquirida en el momento t , cuando sea *menor* el precio q_t . El término $p_t \cdot Pmq_{kt}$ indica el valor del *producto marginal del capital* en el momento t . Los coeficientes constantes d_1 y d_2 son la *tasa de depreciación* del capital, y la *tasa de interés* a la cual pudo colocarse el dinero gastado en adquirir bienes de capital en el momento t .

Supondremos que el producto marginal puede escribirse como una función lineal, tal que

$$Pmq_{kt} = c - e \cdot K_t,$$

donde $c > 0$, $e > 0$ y $Pmq_{kt} > 0$.

Por lo tanto, la ecuación diferencial

$$(2) \quad q_t' = (d_1 + d_2) \cdot q_t - p_t \cdot (c - e \cdot K_t)$$

nos proporciona el conjunto de puntos (q_t, K_t) para los cuales la adquisición de bienes de capital es óptima en el momento t .

* Supondremos que los PK aumentarán la oferta de sus productos en proporción directa al aumento de los precios relativos (q_t/p_t) , puesto que los salarios *nominales* que pagan los PK están indexados por los precios de los bienes de consumo.

Igualando los *usos* de los bienes de capital, indicados en (1), a su *función de oferta*, tenemos

$$K_t' + d_1 \cdot K_t = I_t = a \cdot (q_t/p_t),$$

donde $a > 0$. Despejando K_t' , podemos escribir la ecuación diferencial

$$(3) \quad K_t' = -d_1 \cdot K_t + a \cdot (q_t/p_t),$$

Utilizando (2) y (3), podemos definir un sistema no homogé-

neo de ecuaciones diferenciales lineales, que constituyen la base del modelo a presentar.

b. Equilibrio y estabilidad en el modelo.

Representaremos el sistema

$$(2) \quad q_t' = (d_1 + d_2) \cdot q_t - p_t \cdot (c - e \cdot K_t),$$

$$(3) \quad K_t' = -d_1 \cdot K_t + a \cdot (q_t/p_t),$$

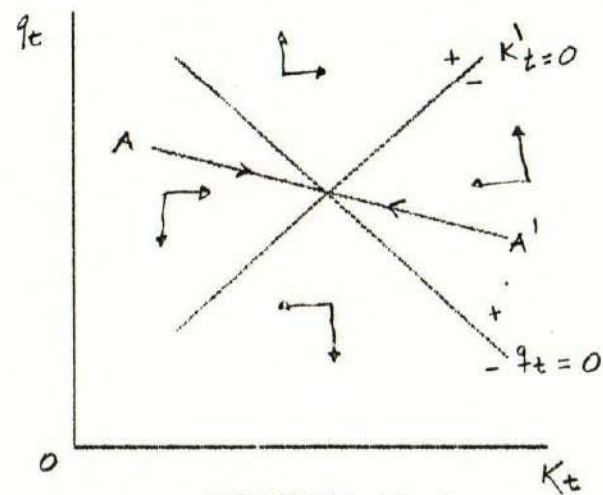
como un diagrama de flujo. Haciendo $q_t' = 0$ y $K_t' = 0$, tenemos

$$q_t = \frac{p_t \cdot (c - e \cdot K_t)}{d_1 + d_2} \quad \text{y} \quad q_t = \frac{p_t \cdot d_1}{a} \cdot K_t.$$

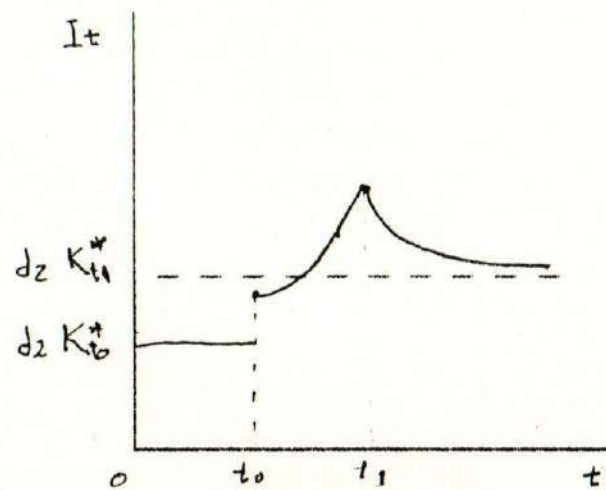
En consecuencia, $q_t' = 0$ tiene pendiente *negativa*, y $K_t' = 0$ la tiene *positiva*. Puede verificarse que las derivadas parciales de q_t' con respecto a q_t en (2), y de K_t' con respecto a K_t en (3) son la primera *positiva* y la segunda *negativa*. Por tanto, siguiendo las indicaciones del apartado a. de la sección B. del Capítulo IV, puede graficarse el diagrama de fase como se muestra en la Gráfica VI. 2.. El punto de equilibrio puede reconocerse como un *punto de silla*.

c. Efecto de una caída anticipada en la tasa de interés sobre la inversión.

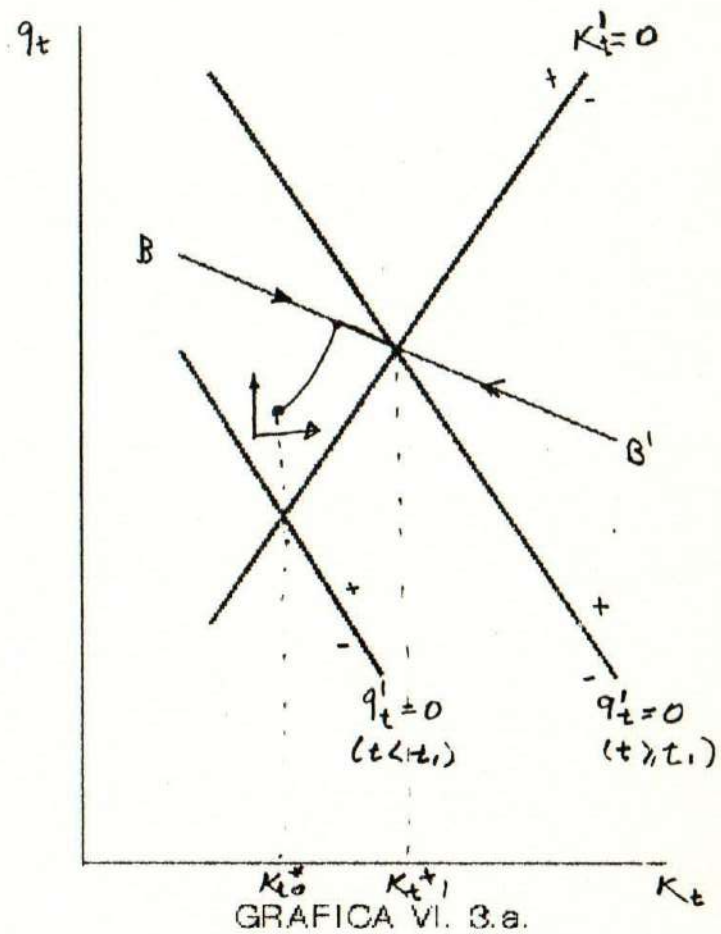
Si en el momento t_0 los PC saben que la tasa de interés d_2 se hará menor en t_1 , anticiparán un aumento en los precios q_t en t_1 , impulsado por la mayor demanda de bienes de capital que ocurrirá en dicho momento. Para reducir sus erogaciones al mínimo, los PC comenzarán sus compras de K_t desde el momento t_0 , presionando suavemente al alza los precios q_t hasta el valor que alcanzarán en el momento t_1 . Luego los precios descenderán hasta el nuevo punto de equilibrio. En la Gráfica VI. 3. puede apreciarse lo indicado.



GRAFICA VI. 2.



GRAFICA VI. 3.b.



GRAFICA VI. 3.a.

D. Un modelo macroeconómico para una economía pequeña, exportadora de petróleo y con tipo de cambio fijo.

En las siguientes páginas se intentará una exposición resumida del **modelo macroeconómico con régimen de cambio fijo**, desarrollado por R. Hausmann en su libro Shocks externos y ajuste macroeconómico, orientada sólo a ilustrar el uso de los diagramas de fase para sistemas autónomos de dos ecuaciones diferenciales no lineales. Por tanto, no debe esperarse encontrar en ellas la justificación de todos los supuestos e implicaciones del modelo.

a. **Definiciones y supuestos básicos.**

a.1. **Identidades y funciones del modelo por sectores.**

a.1.1. **Sector gasto.**

La generalidad de los modelos de economía estático-comparativa estudiados en cursos de pregrado parten de la definición contable

$$GBI = C + I + G + BC,$$

donde *GBI* es el *gasto en bienes y servicios interiores*, *C* es el *gasto de consumo*, *I* es el *gasto de inversión*, *G* es el *gasto del gobierno* y *BC* es la *balanza comercial*, compuesta por la diferencia entre *exportaciones* e *importaciones* de bienes y servicios producidos o utilizados en el interior de la economía.

Suponiendo que

$$PNN = GBI,$$

donde *PNN* es el *producto nacional neto*, puede afirmarse que *I* es la *inversión neta*, esto es, K' , la derivada del capital K con respecto al tiempo.

Suponiendo que

$$PNN = PNI,$$

donde *PNI* es el producto nacional *interno*, puede afirmarse que el valor de la producción es contablemente idéntico al ingreso nominal, puesto que los propietarios de los factores de producción son los propietarios de la producción, cuyo valor perciben en forma de ingreso como remuneración factorial. Para expresar ambas magnitudes en términos reales, suelen deflactarse con respecto un índice general de precios.

Sobre este marco puede comenzarse la exposición del modelo de esta sección.

* Se supone que en la economía existen dos conjuntos de agentes propietarios de factores de producción diferentes. Por un lado, se establece que las familias poseen el *capital*, *K*, y el *trabajo*, *L*. Por otro lado, se postula que el *gobierno* posee el *derecho* de explotación económica del petróleo.

* Se supone que la producción de realizada con *trabajo*, *L*, y *capital*, *K*, se reparte entre bienes transables en el mercado internacional, X_T , y no transables, X_N . El primer conjunto es medido en divisas, y el segundo en moneda nacional. Por tanto, el ingreso nominal de las familias, *y*, puede escribirse como

$$y = P_T \cdot X_T + P_N \cdot X_N$$

Para unificar las unidades de medida y disponer del ingreso real, *Y*, puede tomarse como numerario el conjunto de los bienes transables. Dividiendo cada término del segundo miembro de la expresión por el índice de precios P_T , podemos escribir

$$(1) \quad Y = X_T + X_N/q,$$

donde $q = P_T/P_N$ es el precio relativo de los bienes transables y no transables o *tipo de cambio real*. Cuando *q* se hace mayor de un

momento a otro, se dice que el tipo de cambio *real* sea ha depreciado. En consecuencia, los bienes transables se han hecho relativamente más caros con respecto a los no transables del primer al segundo momento. Cuando ocurre lo contrario, se dice que el tipo de cambio *real* se ha apreciado.

* Las familias utilizan su ingreso, Y , y su riqueza financiera *real* en el momento 0, A_0 , para pagar impuestos al gobierno, ahorrar y consumir bienes transables y no transables. Se supone que no consumen petróleo.

Definiremos riqueza financiera *real* de las familias, expresada en unidades de transables, como

$$A = M^l/e + D = M + D,$$

donde M^l es la tenencia neta de moneda local, e el tipo de cambio *nominal*, que expondremos más adelante y D el acervo de divisas adquirido por las familias.

Puede escribirse, en forma de *restricción presupuestaria*, el uso que las familias dan a su ingreso disponible. Situamos este concepto en el primer miembro de la expresión

$$A_0 + Y - T = C_T + C_N/q + A_1,$$

donde T es el impuesto sobre la renta, C_T es el gasto en consumo de transables, medido en divisas, C_N es el gasto en consumo de no transables, medido en moneda nacional y A_1 es la riqueza financiera *real* en el instante posterior 1. Todas las variables fueron expresadas en términos *reales*, deflactando las nominales por el índice de precios P_T .

Funcionalmente, podemos definir las como

$$T = t.Y,$$

donde t es la proporción del ingreso que se paga al gobierno,

$$C_T = C_T[q, (1-t).Y, A],$$

$$C_N = C_N[q, (1-t).Y, A],$$

donde los signos sobre cada variable indican el correspondiente a la derivada parcial de la función con respecto a ellas, y

$$A_1 = A_0 + H_0,$$

donde H_0 es el valor *real* del ahorro en el momento 0.

Siendo el ahorro *real* un *flujo* a lo largo del tiempo, que hace mayor o menor el *nivel* de riqueza financiera *real* de la economía, puede decirse que tal nivel es una *acumulación* de los flujos de ahorro. Si suponemos que el ahorro puede escribirse como una *función* continua del tiempo t , de modo que $H = H(t)$, y que puede tomarse su integral, podremos escribir

$$H = A',$$

lo que implica que la función primitiva de H es la *función nivel* de riqueza *real*, $A = A(t)$, que como la función ahorro, depende del tiempo, t .

En base a esto, podemos escribir la ecuación diferencial *no lineal*

$$(2) \quad A' = H = (1-t).Y - C_T - C_N/q.$$

* Se supone constante el capital K , por lo que

$$I = K' = 0.$$

En este modelo no hay **inversión**.

* El *ingreso real* del **gobierno** proviene del producto petrolero, Z , y del impuesto sobre la renta, $T = t.Y$, ambos medidos en términos de transables.

Se supone que la producción de petróleo no requiere ni de

capital ni de trabajo, sino de un factor de producción específico, propiedad del gobierno, que hemos llamado *derecho*. Además, se supone que su producción no depende del precio internacional del petróleo, P_p^* , y que tampoco le afecta. En base a estos supuestos, puede escribirse

$$Z = (P_p^* \cdot X_p) / P_T^*,$$

donde P_T^* es el índice de precios internacional de bienes transables, y X_p es la producción petrolera medida en barriles, que, se supone, es exportada por completo al resto del mundo.

Esta expresión indica la *capacidad de importación* que proporciona el producto petrolero, Z , al gobierno.

El *gasto real* del gobierno, medido en términos de transables, se divide en gasto en bienes transables, G_T , y gasto en no transables, G_N . Tales gastos son variables exógenas en el modelo. Llamaremos a la diferencia entre gastos e ingresos del gobierno, es decir, a su *ahorro (negativo)*, *déficit fiscal*, DF , y le representaremos como

$$(3) \quad DF = G_T + G_N/q - Z - t.Y.$$

* Reservamos la presentación de los supuestos sobre la balanza comercial hasta el siguiente sub-apartado.

a.2. El sector externo.

* Se supone que el *tipo de cambio nominal*, e , es fijo. Sabemos que este tipo es el factor de conversión de una divisa a moneda nacional, por tanto, el *nivel* de precios internacionales de los bienes transables, dado por el índice P_T^* , puede expresarse en moneda nacional mediante

$$P_T = e \cdot P_T^*.$$

Puesto que la economía del modelo es pequeña, la *ley de un sólo precio* es pertinente: podrá venderse (o comprarse) al resto del mundo cualquier cantidad de transables al precio internacional *sin alterarlo*. Si hay libertad de comercio, el mercado de transables siempre se encuentra en equilibrio, puesto que la diferencia entre lo producido y lo demandado se satisface mediante importaciones, I_m , de modo que

$$I_m = C_T + G_T - X_T.$$

Supondremos que P_T^* es fijo, y que, cambiando su base, puede hacerse igual a la unidad. Con ello, puede escribirse

$$P_T = e.$$

* Definiremos la balanza comercial, diferencia entre exportaciones e importaciones realizadas en la economía, como

$$(4) \quad BC = Z + X_T - C_T - G_T.$$

Puesto que un valor distinto de cero para BC indica diferencias entre el ingreso nacional, Y_N , y el gasto de los residentes en el interior, GRI , podemos escribir

$$BC = Y_N - GRI,$$

donde

$$Y_N = Y + Z$$

y

$$GRI = (C_T + C_N/q) + (G_T + G_N/q).$$

Puede notarse que se han restado los gastos de las familias y el gobierno a sus ingresos, por lo que se han encontrado sus ahorros. Esto puede escribirse como

$$(4.1) \quad BC = H - DF,$$

o

$$H = A' = BC + DF,$$

que nos permite escribir la ecuación diferencial no lineal

$$(2.1.) \quad A' = X_T - C_T + G_N/q - t.Y.$$

* Restando a BC la adquisición de activos financieros externos, D , que las familias hacen al resto del mundo, se define la balanza de pagos, B , que puede escribirse como

$$B = BC - D.$$

Se supone que el resto del mundo no mantiene activos en moneda nacional.

a.1.3. El sector producción.

* Se supone que la función de producción de **bienes no transables** tiene rendimientos constantes, y que depende sólo del factor trabajo, L_N , con el cual mantiene una relación de la forma

$$X_N = a.L_N.$$

Si se impone la restricción $a = 1$, podemos escribir

$$(5) \quad X_N = L_N.$$

Consideremos la función de beneficios, b , de los empresarios

$$\begin{aligned} b &= P_N.X_N - S.L_N, \\ &= L_N.(P_N - S). \end{aligned}$$

Derivando b con respecto a L_N e igualándola a 0, tendremos que los empresarios maximizan su beneficio cuando

$$P_N = S.$$

Este resultado es muy importante. Recordando que

$$P_T = e,$$

y que

$$q = P_T/P_N,$$

notamos que podemos escribir

$$(6) \quad q = e/S = P_T/P_N,$$

de donde concluimos que en el modelo propuesto hay un único precio relativo a considerar.

* El mercado de no transables está en equilibrio cuando

$$(7) \quad X_N = C_N + G_N.$$

* La producción de **bienes transables**, X_T , requiere de trabajo, L_T , y capital, K , por lo que podemos escribir su función de producción como

$$X_T = X_T(L_T, K).$$

Si supone que esta función tiene rendimientos constantes a escala, y que el capital no varía, la productividad marginal del trabajo debe ser decreciente.

Para maximizar su beneficio, los empresarios contratarán trabajadores hasta que el producto marginal del trabajo se iguale al *salario producto* por trabajador, definido como S/P_T , donde S es el salario nominal por trabajador.

Si se escriben las funciones de demanda de trabajo y de producción en función del inverso del salario producto, utilizando la igualdad

$$q = e/S = P_T/P_N,$$

tendremos

$$(8) \quad L_T = L_T(q) \quad L_T' > 0$$

y

$$(9) \quad X_T = X_T(q) \quad X_T' > 0.$$

* Se supone exógena la oferta de trabajo, L . Es condición para el equilibrio de pleno empleo que se cumpla

$$(10) \quad L = L_T + L_N,$$

donde L_T es la demanda de trabajo por productores de bienes transables y L_N la demanda de trabajo por productores de no

transables.

Puede demostrarse que la *tasa instantánea de crecimiento* de (S/e) puede escribirse como

$$\frac{(S/e)'}{(S/e)} = \frac{S'}{S} - \frac{e'}{e} = \frac{S'}{S} - \frac{q'}{q},$$

puesto que e es *fijo*.

La condición de equilibrio dinámico de pleno empleo exige que dicha tasa sea nula, lo que sucede cuando la *tasa de desempleo*, U , es igual a la *tasa natural*, $\bar{U}$. Una manera de expresar de cuáles funciones depende el valor de esta tasa es escribiendo

$$(11) \quad (S/e)'/(S/e) = F(L_T + L_N - L),$$

donde $F' > 0$ y $F(0) = 0$. Esto implica que, por ejemplo, si $\bar{U} > U$, el tipo de cambio *real*, q , disminuye, es decir, se *aprecia*.

a.1.4. El sector monetario.

Si se supone que, al sumar el balance de activos y pasivos financieros que el sistema financiero privado mantiene con las familias, al balance de pasivos y activos financieros que las familias mantienen con dicho sistema, el resultado es nulo, puede afirmarse que tales activos no forman parte del *nivel* de riqueza agregada *neto* de los hogares.

El nivel de riqueza se define como la suma de los activos *acumulados* que no tienen una contrapartida que les anule. Supondremos que tales son los componentes de la *base monetaria*, M , activo de los agentes contra el Banco Central, compuesta por las reservas internacionales, R , activo del Banco Central contra el exterior, y los créditos al gobierno, L_G , activos del Banco

Combinando los supuestos anteriores y los del sub-apartado a.1., pueden definirse cinco funciones de "equilibrio" para este modelo, identificando las variables independientes y la dirección de sus efectos sobre cada función. Para identificar la dirección de los efectos, se escriben los signos de las derivadas parciales de la función con respecto a cada variable independiente sobre dicha variable.

Examinemos las funciones.

* Función YY^C : equilibrio en el mercado de no transables.

Se sustituye la condición de equilibrio (7) en la definición de ingreso, (1), obteniéndose la expresión

$$Y = X_T(q) + C_N[q, (1-t) \cdot Y, AJ/q + G_N/q].$$

Esta función reúne todos los niveles de ingreso para los cuales el mercado de no transables se encuentra en equilibrio, es decir, se vacía. Puede escribirse sintéticamente como

$$Y = YY^C(q, A, G_N, t).$$

* Función NN^C : equilibrio en el mercado de trabajo.

Para que el mercado de trabajo se encuentre en equilibrio, toda la oferta de trabajo debe ser demandada. Por tanto, si se dispone del nivel de producción de bienes transables, y de la magnitud de la demanda de trabajo necesaria para alcanzarlo, puede comprenderse que el pleno empleo se alcance cuando el resto de la oferta de trabajo sea empleada en la producción de no transables. El conjunto de niveles de ingreso para los cuales esta igualdad se cumpla pueden hallarse mediante la función

$$Y = X_T(q) + [L - L_T(q)]/q,$$

que puede hallarse imponiendo a (5) la restricción (10), y sustituyendo el resultado en (1). Sintéticamente, puede escribirse como

$$y^{NN} = NNC(q, L).$$

* Función BB^C : equilibrio en la balanza comercial.

El equilibrio se consigue en aquellos puntos para los que

$$BC = 0,$$

de donde, anulando (4), se sigue

$$BC = X_T(q) - C_T[q, (1-t).Y, A] + Z - G_T = 0,$$

o, sintéticamente,

$$BB^C(q, Y, A, Z, G_T, t) = 0.$$

* Función DF^C : equilibrio en cuentas fiscales.

Hay equilibrio en aquellos puntos donde

$$DF = 0.$$

Por tanto, anulando (3), se tiene

$$DF = G_T + G_N/q - Z - t.Y = 0,$$

o, sintéticamente,

$$DF^C(q, Y, Z, G_T, G_N, t) = 0.$$

* Función AA^C : estacionariedad de la riqueza.

El nivel de riqueza de los hogares se mantiene invariable si

$$A' = H = 0.$$

Por tanto, anulando (2.1), se tiene

$$A' = X_T(q) - C_T[q, (1-t).Y, A] + G_N/q - t.Y = 0,$$

o, en forma sintética,

$$\begin{matrix} + & - & - & - & + \\ AA^C(q, Y, A, t, G_N) = 0 \end{matrix}$$

b. El modelo dinámico.

En el "largo plazo", escribe Hausmann, la economía está en equilibrio si no existen presiones que le hagan cambiar a través del tiempo.

En este modelo se supone que existen dos funciones continuas del tiempo. Ellas son el nivel de salario nominal por trabajador, S , y el nivel de riqueza de las familias, A' . Por tanto, para que halla equilibrio, debe ocurrir simultáneamente que $S' = 0$ y $A' = 0$. Además, deben alcanzarse todos los equilibrios del modelo estático.

Las cuatro funciones de este modelo se obtienen sustituyendo, unas en otras, las condiciones de equilibrio definidas para el modelo estático en el sub-apartado a.2. Como en dicha sección, se escribirán los signos de las derivadas parciales de cada función con respecto a cada variable independiente sobre dicha variable. Cuando los efectos directos e indirectos de una variable sobre una función son contradictorios, se coloca un signo de interrogación bajo la variable, y sobre ella el signo del efecto que se supone dominante.

Examinemos las funciones.

* Función NN^L : equilibrio en el mercado de trabajo.

Se cumplirá que $S' = 0$ en todos los puntos donde exista pleno empleo, esto es, sobre la función NN^C . Puesto que el mercado de no transable debe estar en equilibrio para que no existan tendencias al cambio a "largo plazo", se afirma que el nivel de

ingreso de las familias, Y , debe satisfacer simultáneamente las condiciones de equilibrio en los mercados de trabajo y de no transables. El mercado de transables, como se ha dicho, siempre está en equilibrio cuando hay libertad de comercio. Esto se consigue igualando las funciones de "corto plazo" NN^C y YY^C , de modo que

$$\begin{array}{ccccccc} - & + & & + & + & + & - \\ NN^C(q, L) & = & YY^C(q, A, G_N, t), \end{array}$$

o, sintéticamente,

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & - & - & & \\ NN^L(q, A, G_N, t, L) & = & 0. \end{array}$$

Como esta función implica pleno empleo "a largo plazo", todos los puntos que define son tales que $S' = 0$.

* Función AA^L : estacionariedad de la riqueza.

Si el nivel de riqueza no se mantiene constante, provocará aumentos en el consumo que causarían cambios en el "largo plazo". Por lo tanto, el ahorro debe ser nulo. Esto se consigue sobre la función AA^C . Para garantizar el equilibrio en el mercado de no transables, debe evaluarse en YY^C , por lo que

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & & & \\ AA^L(q, A, G_N, t) & = & 0. \\ ? & & ? & & ? & & \end{array}$$

Existe ambigüedad en cuanto a los signos. Para nuestros fines, interesa sólo explicar su causa con respecto al signo del efecto de una variación en q , dejándose indicados los signos escogidos por Hausman para las variaciones de las demás variables.

El efecto de una depreciación de q es diferente sobre cada conjunto de bienes. Sobre los transables causa un aumento en la

producción, X_T , y una *reducción* en el consumo, C_T , por lo cual aumenta el ahorro. Ocurre lo contrario sobre los no transables. Hausman supone que el primer efecto domina, y lo demuestra para el caso $t = 0$.

Como esta función implica estacionariedad del nivel de riqueza "a largo plazo", todos los puntos que define son tales que $A' = 0$.

* Función BB^L : equilibrio en la balanza comercial.

Existe equilibrio en la balanza comercial cuando

$$BC = 0.$$

A "largo plazo", este equilibrio debe ser consistente con el equilibrio en el mercado de no transables, por lo que, sustituyendo YY^C en BB^C , y escribiendo la expresión sintética, tenemos

$$\overset{+}{BB^L}(q, \overset{-}{A}, \overset{-}{G_N}, \overset{+}{t}, \overset{+}{Z}, \overset{-}{G_T}) = 0.$$

?

Existe ambigüedad con respecto al signo del efecto de una variación de q . Si suponemos, como en el caso anterior, una *depreciación* de q , *aumentarán* las exportaciones y el consumo de bienes transables, siendo el primer efecto *positivo* y el segundo *negativo* sobre BC . Hausmann demuestra que el efecto positivo de la *depreciación* predomina.

* Función DF^L : equilibrio en las cuentas fiscales.

Se sabe que hay equilibrio fiscal si

$$DF = 0.$$

A "largo plazo", este equilibrio debe ser consistente con el equilibrio en el mercado de no transables, por lo que, sustituyendo YY^C en DF^C , y escribiendo la expresión sintética, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} & - & - & + & - & + & - \\ DF^L(q, A, G_N, t, G_T, Z) & = & 0. \\ & ? & & ? & & & \end{array}$$

Para nuestros fines, no es necesario explicar la causa de la ambigüedad en los signos de los efectos de G_N y t .

b.2. Equilibrio y estabilidad.

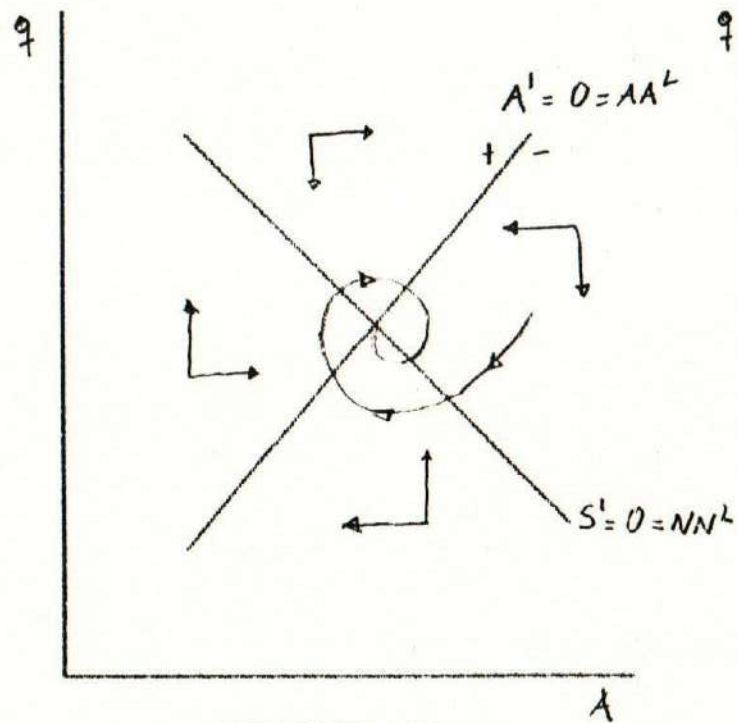
Notemos que, de todas las variables utilizadas en el modelo dinámico, sólo son endógenas el nivel de riqueza de las familias, A , el salario monetario, S , y, por tanto, la tasa de cambio real, q . Por tanto, podemos graficar cuatro curvas sobre el plano qA , correspondientes a las cuatro funciones que presentamos

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & \end{array} \\ (i) & NN^L(q, A, G_N, t, L) = 0, \\ & \begin{array}{cccccc} + & - & + & - & & \\ ? & & ? & ? & & \end{array} \\ (ii) & AA^L(q, A, G_N, t) = 0, \\ & \begin{array}{cccccc} + & - & - & + & + & - \\ ? & & & & & \end{array} \\ (iii) & BB^L(q, A, G_N, t, Z, G_T) = 0, \\ & \begin{array}{cccccc} - & - & + & - & + & - \\ ? & & ? & & & \end{array} \\ (iv) & DF^L(q, A, G_N, t, G_T, Z) = 0. \end{array}$$

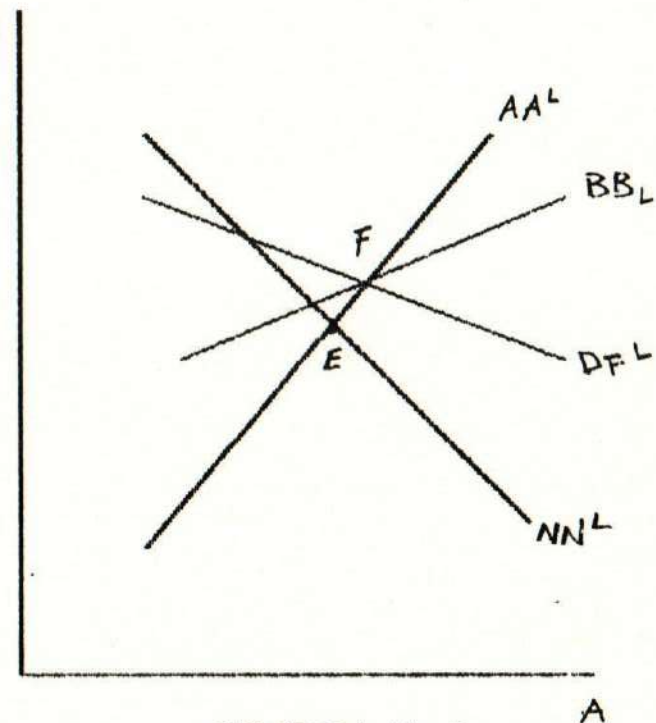
De las cuatro funciones presentadas, la primera supone que $S' = 0$ y la segunda que $A' = 0$. Todos los puntos que no son comprendidos por una de las dos son puntos donde tales derivadas son distintas de cero. Por tanto, puede considerarse al plano qA un plano fase, y es posible dibujar un diagrama de fases.

Consideremos la función (i).

Puesto que los signos de los efectos de q y A sobre el nivel de empleo, y, por tanto, sobre la tasa de variación de S , son ambos positivos, podemos inferir que la curva NN^L debe ser monó-



GRAFICA VI. 4.



GRAFICA VI. 5.

tonamente decreciente en el plano qA . Afirmamos esto porque los efectos *positivos* de un aumento en el nivel de riqueza deben ser compensados exactamente por los efectos *negativos* de una caída en el valor del tipo de cambio *real* (apreciación de q), si el empleo debe mantenerse al nivel de pleno empleo y, en consecuencia, se mantiene la igualdad funcional $S' = 0$.

Como el efecto de una variación de A sobre el nivel de empleo es *positivo*, a la derecha de la curva NN^L debe existir *sobre-empleo*. Recordando la relación

$$F(L_T + L_N - L) = -q'/q,$$

donde $F' > 0$, puede afirmarse que el tipo de cambio *real* tenderá a apreciarse cuando hay sobre-empleo, por lo que su valor se hará *menor*. Esto se representa en el plano fase (Gráfica VI. 4.) trazando una flecha *vertical* apuntando hacia abajo, a la derecha de NN^L . A la izquierda, la flecha apunta hacia arriba. Ambas apuntan hacia la función.

Consideremos la función (ii).

Puesto que los signos de los efectos de q y A sobre el ahorro y, por tanto, sobre la tasa de variación de A , son *contrarios*, podemos inferir que la curva AA^L debe ser monótonamente creciente en el plano qA . Afirmamos esto porque los efectos *negativos* de un aumento en el nivel de riqueza deben ser compensados exactamente por los efectos *positivos* de un alza en el valor del tipo de cambio *real* (depreciación de q), si el nivel de riqueza debe mantenerse al nivel de pleno empleo y, en consecuencia, se mantiene la igualdad funcional $A' = 0$.

Se ha supuesto que el ahorro, $H = A'$ es una función decreciente del nivel de riqueza, A , porque el consumo se incrementa

cuando se hace mayor dicho nivel. Por tanto, la derivada parcial de la función A' con respecto a A es *negativa*. Representamos esto en el diagrama de fase trazando a ambos lados de la función AA^L flechas horizontales que apuntan hacia ella.

Definidos ambos conjuntos de flechas, puede dibujarse una *trayectoria* representativa sobre el plano fase. Puede constatarse que es una espiral que converge hacia la intersección de las curvas NN^L y AA^L .

Si el modelo constara sólo de las funciones (i) y (ii), concluiríamos afirmando que el punto de intersección de ambas curvas, E, es un punto de equilibrio *asintóticamente estable*, un *punto espiral estable*.

Consideremos a continuación las curvas para las funciones (iii) y (iv) en el plano qA . Revisando en ambas los signos sobre q y A , y razonando de manera similar que antes, podemos afirmar que la curva para BB^L debe ser monótonamente creciente, y la correspondiente a DF^C monótonamente decreciente. Puede deducirse, además, que bajo las curvas BB^L y DF^C hay déficits en balanza comercial y en cuentas fiscales.

Representemos las cuatro curvas sobre el plano qA (Gráfica VI. 5.). Notemos que AA^L , BB^L y DF^L deben cortarse en el mismo punto, F, puesto que

$$H' = BB + DF.$$

Este punto *no* tiene que coincidir con el *punto espiral estable* que hemos hallado. Supongamos que el punto E se encuentra bajo las curvas BB^L y DF^L .

Desde cualquier punto en qA , distinto de E, partirá una

trayectoria que tienda al *punto espiral estable* cuando t tienda a infinito. Aun cuando en este punto la riqueza se mantiene estacionaria y el empleo en el nivel de pleno empleo, hay déficits en cuentas fiscales y de balanza comercial. En consecuencia, aumentan continuamente los créditos del Banco Central al gobierno, L_G , y cae el *nivel* de reservas internacionales, R .

Aun cuando ninguna fuerza endógena separe al punto en movimiento de su trayectoria hacia E , tal punto es insostenible económicamente. Baste indicar que la pérdida continua de reservas impide el mantenimiento de una *tasa de cambio nominal*, e , fija.

Los efectos de las políticas fiscales y cambiarias, y de los *shocks* externos sobre el valor del producto petrolero, Z , pueden evaluarse sobre este diagrama. Para ello, se mueven todas las curvas en la dirección que indiquen los signos sobre la variable *exógena* escogida en cada una de ellas. Luego se observa la relación entre los puntos F y E , y se llega a conclusiones *lógicas* sobre las consecuencias para la economía de los cambios propuestos para tales variables.

Esto puede encontrarse detalladamente expuesto en el libro de Hausmann.

Anexo al Capítulo VI.

Notas sobre la tasa instantánea de crecimiento.

Sea la tasa instantánea de crecimiento, r_y , de una función del tiempo, $y = f(t)$, la función

$$r_y = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Sabiendo

- (1) que la derivada con respecto a t del logaritmo neperiano de una función $f(t)$ es de la forma

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)},$$

- (2) que la función logaritmo tiene las propiedades

$$\ln (u \cdot v) = \ln u + \ln v$$

$$\text{y} \quad \ln (u/v) = \ln u - \ln v,$$

podemos, suponiendo $u = u(t)$ y $v = v(t)$, escribir

- (1) la tasa de crecimiento, r_y , de la multiplicación

$$y = u \cdot v,$$

como

$$r_y = (\ln y)' = (\ln u)' + (\ln v)',$$

donde $(\ln y)'$ se lee como derivada logarítmica de y con respecto a t . Lo escrito equivale a

$$r_y = r_u + r_v.$$

- (2) la tasa de crecimiento, r_y , de la división

$$y = u/v,$$

como

$$r_y = (\ln y)' = (\ln u)' - (\ln v)',$$

donde $(\ln y)'$ se lee como derivada logarítmica de y con

respecto a t . Lo escrito equivale a

$$r_y = r_u - r_v.$$

(3) la tasa de crecimiento, r_y , de la suma

$$y = u + v,$$

como

$$r_y = (\ln y)' = [\ln (u + v)],$$

donde $(\ln y)'$ se lee como derivada logarítmica de y con respecto a t . Lo escrito conduce a

$$r_y = \frac{1}{u + v} \cdot [f(t)' + g(t)'],$$

Puesto que $r_u = f(t)' / f(t)$, $f(t)' = f(t) \cdot r_u$. Análogamente, $g(t)' = g(t) \cdot r_v$, por lo que puede escribirse

$$r_y = \frac{u}{u + v} \cdot r_u + \frac{v}{u + v} \cdot r_v.$$

(4) la tasa de crecimiento, r_y , de la resta

$$y = u - v,$$

como

$$r_y = (\ln y)' = [\ln (u - v)],$$

donde $(\ln y)'$ se lee como derivada logarítmica de y con respecto a t . Lo escrito conduce a

$$r_y = \frac{1}{u - v} \cdot [f(t)' - g(t)'],$$

Puesto que $r_u = f(t)' / f(t)$, $f(t)' = f(t) \cdot r_u$. Análogamente, $g(t)' = g(t) \cdot r_v$, por lo que puede escribirse

$$r_y = \frac{u}{u - v} \cdot r_u - \frac{v}{u - v} \cdot r_v.$$

Tomado de Chiang, A, 1987, págs. 308-310.

Conclusiones.

El estudio de problemas económicos requiere de procedimientos inductivos y deductivos apropiadamente conducidos.

Es sabido que la solución *correcta* de un sistema lógico no depende de los supuestos que se establezcan, sino del razonamiento que se realice a partir de ellos. Por tanto, la solución *correcta* de un sistema lógico *construido* con la intención de explicar la *realidad*, sea en la física, la biología o la economía, puede no permitir explicar lo *pasado* y, por tanto, no servir para predecir el *futuro*.

Cuando los sistemas lógicos se construyen es, pues, obligatorio partir de los supuestos más apegados a la *realidad* que sea posible proponer. Si nos referimos sólo a la economía, es necesario cumplir con dos condiciones. En primer lugar, debe conocerse la historia de la sociedad que desea explicarse, su situación en el momento presente y la manera como sus miembros forman sus expectativas con respecto al futuro. De esta manera se determinan las variables fundamentales y las características de sus relaciones. En segundo lugar, es necesario disponer de amplios conocimientos metodológicos que permitan ordenar las variables y proponer relaciones operativas útiles entre ellas. Mientras más sencillos son los supuestos, menos *reales* son. Mientras más complejos, más difíciles de incorporar en un modelo.

Puesto que los modelos se construyen para explicar el *pasado* y predecir el *futuro*, es necesario que se hagan supuestos explícitos sobre la consideración del *tiempo* en su estructura, y que esta sea comprendida. Augusto Comte quizás incluiría al

tiempo dentro del conjunto de lo *incognoscible*, alejando a los "científicos sociales" del estudio de su esencia. Ciertamente, su definición puede ser imposible, pero quien pretende cambiar algún aspecto del mundo debe hacerse con una *idea del tiempo* que le permita incorporarlo a sus estudios sin la incomodidad que representa aceptar algo inexplicado al intentar una explicación.

Una concepción del tiempo que haga útil un modelo económico dinámico quizás debe ser diferente a la implícita en las páginas anteriores: *el tiempo puede tratarse como una sucesión infinita de puntos sobre una línea, que mantiene una relación biunívoca con el conjunto de los números reales y sobre la cual puede escogerse un punto arbitrario, llamado 0, para determinar un momento inicial.* Esta proposición, que ha sido afortunada para el estudio de los movimientos de los astros, sometidos al mismo sistema de fuerzas durante millones de años, puede ser muy perjudicial para el estudio de la relaciones económicas, sometidas a fuerzas siempre, y con frecuencia arbitrariamente, cambiantes: la promesa de retornar al equilibrio dinámico en un tiempo infinito, *ceteris paribus*, no parece ser la más alentadora para sostener un "equilibrio" social.

De la misma manera, disponer de un concepto de tiempo apropiado es fundamental para un uso correcto de las teorías econométricas y otros medios de contrastación empírica.

Existen graves peligros para quien pretenda inducir comportamientos en sistemas *reales* teniendo como base sistemas *lógicos*. Suponiendo que estos se encuentren bien formulados en términos de la razón, un error en la escogencia de los supuestos o en la contrastación de las proposiciones puede conducir a una catástrofe.

Bibliografía.

- ANTON, H.: Introducción al Álgebra Lineal, Tercera Edición; México, Editorial Limusa, S.A., 1989; 422 págs.
- APOSTOL, T.: Calculus; España, Editorial Reverte, S.A., 1985; 2 volúmenes.
- BALZA G., R. Mercado de capitales y política monetaria. Enfoque teórico y revisión de su historia en Venezuela (1958 - 1991); Caracas, 1991; 109 págs. Inédito.
- BEGG, D. La revolución de las expectativas racionales en la macroeconomía; México, F.C.E., 1989; 259 págs.
- BOYCE, W. y R. DiPRIMA; Introducción a las Ecuaciones Diferenciales; México, Editorial Limusa, S.A., 1984; 337 págs.
- CHIANG, A.: Métodos fundamentales de economía matemática. Tercera Edición; México, McGraw-Hill, 1987; 805 págs.
- FLEMING, W. y D. VARBERG; Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 3/E ; México, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1991; 777 págs.

HAUSMANN, R. Shocks externos y ajuste macroeconómico; Caracas, B.C.V., 1990; 367 págs.

HENDERSON, J.M. y R.E. QUANDT; Teoría microeconómica. edición revisada y puesta al día; España, Editorial Ariel, S.A., 1985; 534 págs.

MARSHALL, A.; Principios de Economía; España, Aguilar, 1948; 728 págs.

SAMUELSON, P. A.; Fundamentos del Análisis Económico; Buenos Aires, "El Ateneo" Editorial, 1957; 461 págs.